U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

# Cap. 2
# Estatística Descritiva

AMG, LGRRF, AFL, JFO (v12 – 2023)

**baseado em:**

***Estatística*,**

**Rui Campos Guimarães**

**José A. Sarsfield Cabral**

# Tópicos

- **Introdução**
- **Tipos de Dados e Escalas**
- **Caracterização e Representação de Dados Categóricos**
- **Caracterização e Representação de Dados Quantitativos**
- **Caracterização e Representação de Dados Bivariados**
- **Anexos**

# Resultados de aprendizagem

- Distinguir os diferentes tipos de escalas em que dados podem ser expressos
- Classificar e sintetizar manualmente pequenos conjuntos de dados amostrais
- Calcular, manualmente ou com recurso a calculadoras, estatísticas de pequenos conjuntos de dados amostrais
- Utilizar folhas de cálculo e software estatístico para classificar e sintetizar dados amostrais (representação tabular e gráfica, cálculo de estatísticas)
- Distinguir os vários tipos de estatísticas: de localização, de dispersão, de forma e de associação
- Interpretar correctamente representações tabulares e gráficas de dados amostrais, assim como os resultados de estatísticas

# Introdução

# Estatística Descritiva

## Objectivo da Estatística Descritiva

**Classificar** e **sintetizar** a informação contida em conjuntos de dados (normalmente uma amostra e apresentados de forma desorganizada)

# Estatística Descritiva

## Objectivo da Estatística Descritiva

**Classificar** e **sintetizar** a informação contida em conjuntos de dados (normalmente uma amostra e apresentados de forma desorganizada)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B | B | S | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | S | B | B | B | B | B | B | B | S | R | B | B | B | R | B | B |
| B | R | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | R | B | R | R | B | R | B | B | B | S | R | B | B | B | R | B | B | B |
| B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | B | B | B | S | R | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | R | B | B |

# Estatística Descritiva

## Objectivo da Estatística Descritiva

**Classificar** e **sintetizar** a informação contida em conjuntos de dados (normalmente uma amostra e apresentados de forma desorganizada)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B | B | S | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | S | B | B | B | B | B | B | B | S | R | B | B | B | R | B | B |
| B | R | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | R | B | R | R | B | R | B | B | B | S | R | B | B | B | R | B | B | B |
| B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | B | B | B | S | R | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | R | B | B |

| Categoria de Peças | Frequência Absoluta | Frequência Relativa |
|---|---|---|
| Sem defeito (B) | 100 | 83.3 % |
| Recuperáveis (R) | 15 | 12.5 % |
| Sucata (S) | 5 | 4.2 % |
| **Total** | **120** | **100 %** |

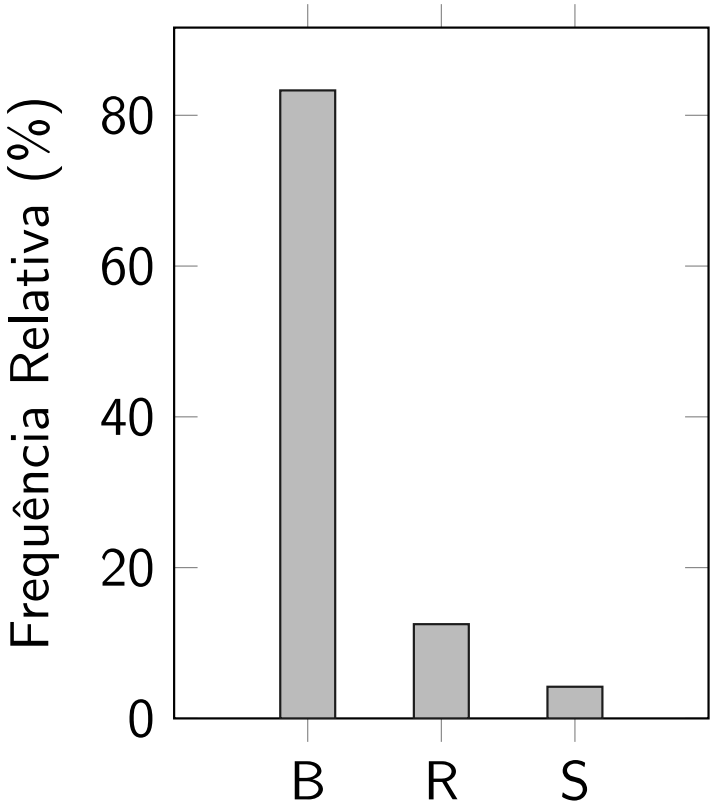
# Estatística Descritiva

## Objectivo da Estatística Descritiva

**Classificar** e **sintetizar** a informação contida em conjuntos de dados (normalmente uma amostra e apresentados de forma desorganizada)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B | B | S | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | S | B | B | B | B | B | B | B | S | R | B | B | B | R | B | B |
| B | R | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | R | B | R | R | B | R | B | B | B | S | R | B | B | B | R | B | B | B |
| B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | B | B | B | S | R | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | R | B | B | B | B | B | B | R | B | B |

| Categoria de Peças | Frequência Absoluta | Frequência Relativa |
|---|---|---|
| Sem defeito (B) | 100 | 83.3 % |
| Recuperáveis (R) | 15 | 12.5 % |
| Sucata (S) | 5 | 4.2 % |
| **Total** | **120** | **100 %** |



# Caracterização de um conjunto de dados

## Características importantes

**Localização** – Valor central ou representativo que indica aonde o conjunto de dados está centrado

**Dispersão** – Medida da variabilidade dos dados em relação ao seu valor central

**Forma** – Forma como os dados se distribuem pela respectiva gama de valores (uniforme, em forma de *sino*, de forma simétrica, ...)

**Valores extremos (*outliers*)** – Valores da amostra que se encontram muito afastados da maioria dos restantes dados amostrais (podem ser resultado de erros de medida)

**Tempo** – Alteração das características dos dados ao longo do tempo (característica a estudar apenas em Estatística Multivariada e sem grande profundidade)

# Tipos de Dados e Escalas

# Classificação de dados segundo a escala em que são expressos

## Dados qualitativos (ou categóricos)

**Escala nominal** – Dados são identificados apenas pela atribuição de um nome que designa uma classe (ou categoria)
(classes: exaustivas, mutuamente exclusivas e não ordenáveis)

**Escala ordinal** – Idêntica à escala nominal, mas em que é possível estabelecer uma ordenação das classes, segundo um critério relevante

## Dados quantitativos (ou numéricos)

**Escala de intervalo** – Os dados são diferenciados e ordenados por números expressos numa escala cuja origem é arbitrária (a diferença entre esses números tem significado, mas o quociente não)

**Escala absoluta** – Tem uma origem fixa (além da diferença, o quociente entre os dados também tem significado)

Dados quantitativos podem ser:

- **Discretos** – resultantes de contagens
- **Contínuos** – resultantes de medições

# Exemplos

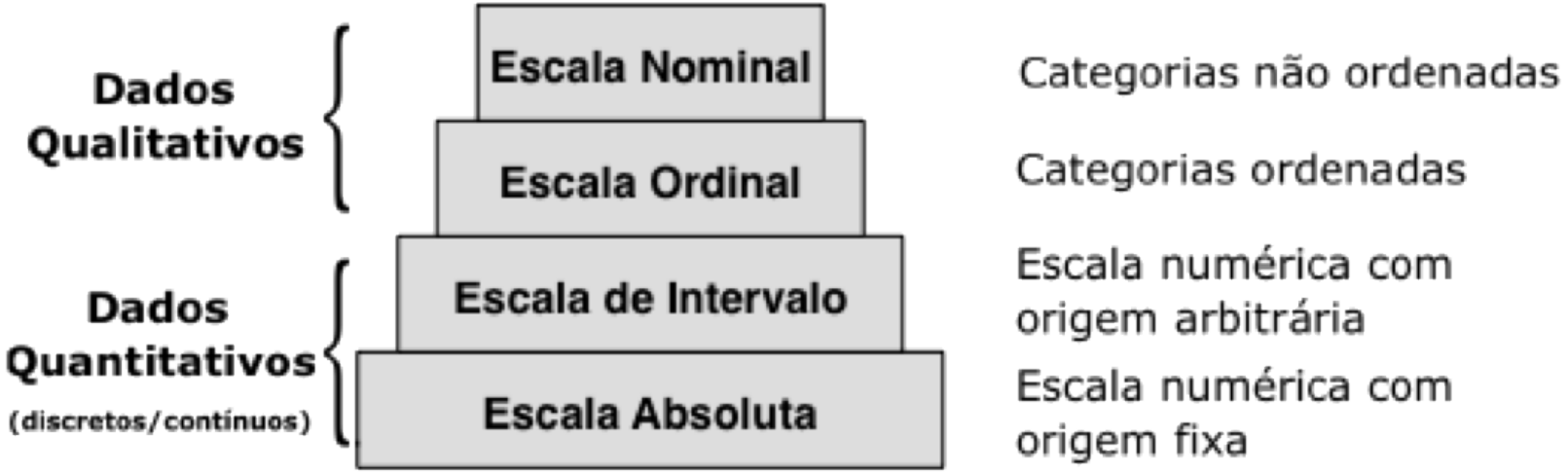
- Classif. de pessoas pela cor do cabelo: preto, castanho, branco, loiro, ...
- Classificação dos consumidores de bens de primeira necessidade pelo género: feminino ou masculino

- Classificações obtidas pelos alunos num teste de Estatística: mau, medíocre, suficiente, bom ou muito bom
- Classificação dos clientes segundo o volume de encomendas que colocam: clientes A (muito importantes), B (importantes) e C (pouco importantes)

- Temperaturas registadas, em $^oC$, às 8 horas de dias sucessivos
  (note-se que não faz sentido dizer que em dias consecutivos a temperatura duplicou, p.e. passou de $5^oC$ para $10^oC$, ... porquê?)

- Peso de pessoas, expressos em kg
- Volumes de investimento, espressos em milhares de euros
- Resultados de 150 lançamentos de um dado

# Comparação entre as diferentes escalas de dados




- escalas apresentam um grau crescente de informação ($\downarrow$)
- dados numa escala podem ser transformados em escalas precedentes ($\uparrow$)

**Exemplo**

Se se dispuser das temperaturas máximas diárias, em $^o$C, registadas na cidade de Faro ao longo último ano, é possível reclassificá-las nas seguintes classes:

- dias frios ($< 18^o$C), dias amenos ($[18^o\text{C}, 25^o\text{C}]$) e dias quentes ($> 25^o$C)

**Variáveis**
**(ou dados)**

**Categóricas**
**(ou qualitativas)**

**Exemplos:**

- Estado civil
- Partido político
- Cor dos olhos

**Quantitativas**
**(ou numéricas)**

**Discretos**
**(contagem)**

**Exemplos:**

- Número de filhos
- Defeitos por hora

**Contínuos**
**(medição)**

**Exemplos:**

- Altura
- Peso

# Caracterização e Representação de Dados Categóricos

# Caracterização de amostras univariadas

**Amostra univariada**

Quando cada um dos dados que a integram mede, numa escala qualquer, apenas um atributo

**Dados categóricos (ou qualitativos)** – distribuem-se por um conjunto de diferentes classes ou categorias

- representação tabular ou gráfica da distribuição de frequências (ou empírica ou dos dados amostrais)

**Dados quantitativos** – dados discretos ou contínuos

- representação tabular ou gráfica da distribuição de frequências
- cálculo de estatísticas (ou medidas) amostrais
- representação gráfica de estatísticas

# Dados Categóricos (ou Qualitativos)

- Caracterização de dados qualitativos: **tabelas de frequências**, **diagramas de barras** e diagramas circulares
- **Objectivo**: representar a forma como os dados se distribuem por um conjunto de diferentes categorias

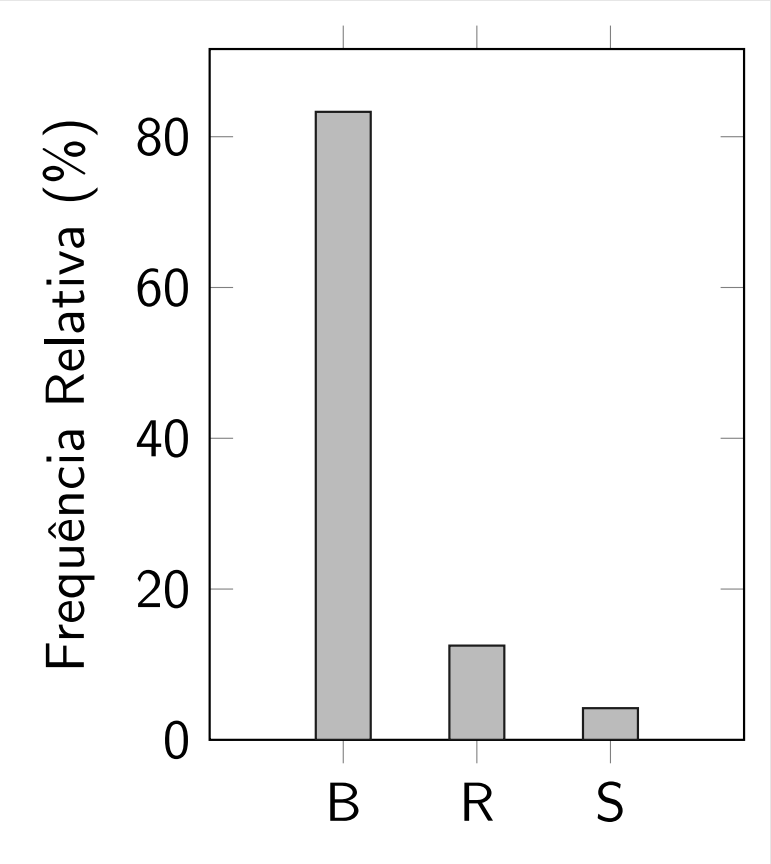
**Frequência absoluta** da categoria $k$ ($N_k$) – número de dados contidos na categoria $k$
Número total de dados: $N = \sum_{k=1}^{K} N_k$

**Frequência relativa** da categoria $k$ ($f_k$) – número de dados contidos na categoria $k$, expresso como uma proporção do número total de dados: $f_k = \frac{N_k}{N}$

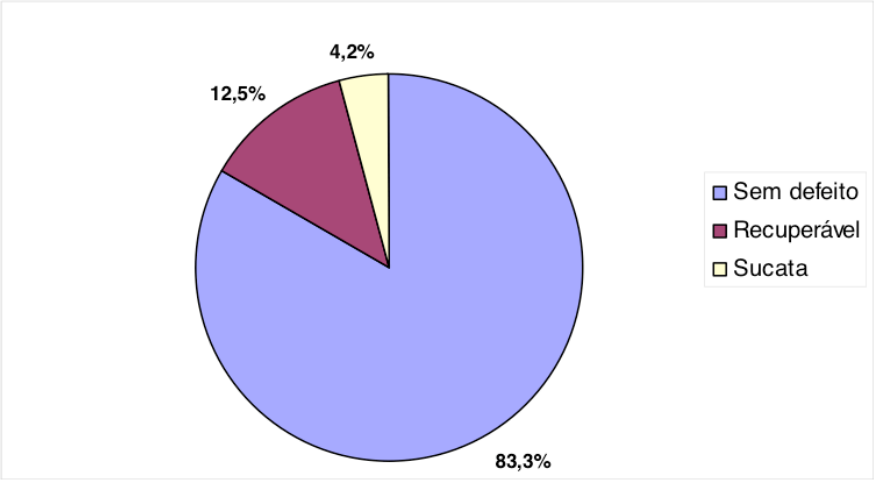
## Tabela de frequências

| Categoria de Peças | Frequência Absoluta | Frequência Relativa |
|---|---|---|
| Sem defeito (B) | 100 | 83.3 % |
| Recuperáveis (R) | 15 | 12.5 % |
| Sucata (S) | 5 | 4.2 % |
| **Total** | **120** | **100 %** |

## Diagrama de barras de frequências relativas




## Diagrama circular de frequências relativas



# Caracterização e Representação de Dados Quantitativos

# Dados Quantitativos

## Descrição de dados quantitativos

- **Representações tabulares e gráficas**
  - tabela de frequências
  - histograma de frequências
  - polígono de frequências
  - polígono de frequências acumuladas
- **Estatísticas**
  - de localização: média, mediana, moda
  - de dispersão: amplitude, intervalo interquartis, desvio médio, desvio quadrático médio, variância, desvio-padrão
  - momentos de ordem $i$
- **Representação gráfica de estatísticas**
  - diagramas tipo caixa (*boxplots*)

# Representação de dados quantitativos contínuos

Peso (em gramas) do conteúdo de 100 garrafas

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 302.25 | 299.20 | 300.24 | 297.72 | 301.10 | 299.70 | 302.17 | 297.47 |
| 298.35 | 303.76 | 298.65 | 299.38 | 301.11 | 298.86 | 298.61 | 304.22 |
| 300.36 | 299.19 | 300.86 | 299.83 | 299.68 | 299.75 | 301.99 | 302.85 |
| 302.52 | 300.12 | 301.81 | 297.99 | 298.49 | 299.60 | 299.26 | 302.45 |
| 299.23 | 298.73 | 303.07 | 299.07 | 303.66 | 302.10 | 298.35 | 302.83 |
| 297.83 | 299.75 | 299.55 | 298.76 | 299.95 | 299.76 | 299.13 | 299.07 |
| 301.85 | 299.83 | 300.52 | 298.98 | 298.72 | 303.49 | 298.00 | 305.13 |
| 300.73 | 300.14 | 298.34 | 299.07 | 298.56 | 301.05 | 302.39 | 297.84 |
| 299.62 | 299.12 | 298.11 | 299.48 | 299.70 | 301.35 | 298.85 | 300.20 |
| 302.45 | 302.04 | 300.83 | 298.94 | 298.34 | 299.70 | 298.36 | 301.59 |
| 298.07 | 298.29 | 303.91 | 298.16 | 297.59 | 300.96 | 299.08 | 300.02 |
| 299.57 | 300.84 | 299.18 | 301.33 | 297.87 | 301.63 | 300.48 | 299.16 |
| 298.23 | 302.00 | 300.86 | 299.80 | | | | |

Como representar este conjunto de dados?

# Representação de dados quantitativos contínuos

Peso (em gramas) do conteúdo de 100 garrafas

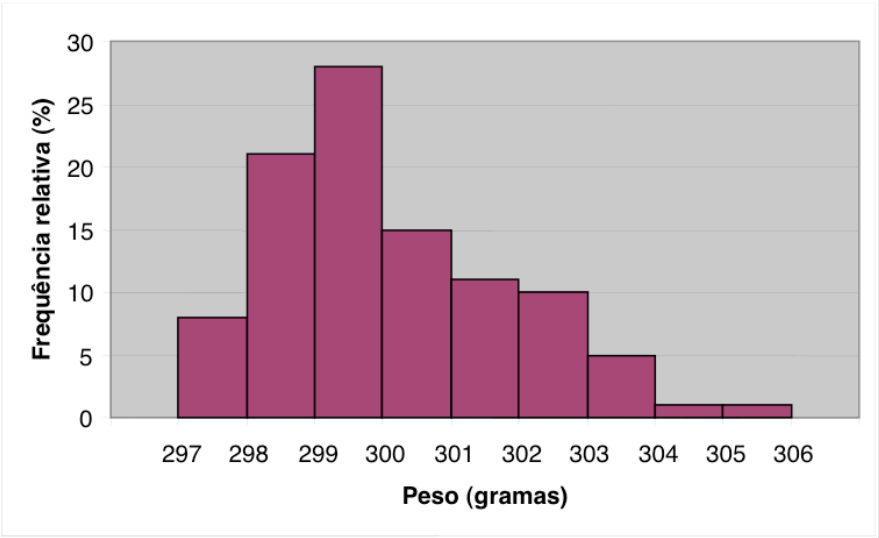
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 302.25 | 299.20 | 300.24 | 297.72 | 301.10 | 299.70 | 302.17 | 297.47 |
| 298.35 | 303.76 | 298.65 | 299.38 | 301.11 | 298.86 | 298.61 | 304.22 |
| 300.36 | 299.19 | 300.86 | 299.83 | 299.68 | 299.75 | 301.99 | 302.85 |
| 302.52 | 300.12 | 301.81 | 297.99 | 298.49 | 299.60 | 299.26 | 302.45 |
| 299.23 | 298.73 | 303.07 | 299.07 | 303.66 | 302.10 | 298.35 | 302.83 |
| 297.83 | 299.75 | 299.55 | 298.76 | 299.95 | 299.76 | 299.13 | 299.07 |
| 301.85 | 299.83 | 300.52 | 298.98 | 298.72 | 303.49 | 298.00 | 305.13 |
| 300.73 | 300.14 | 298.34 | 299.07 | 298.56 | 301.05 | 302.39 | 297.84 |
| 299.62 | 299.12 | 298.11 | 299.48 | 299.70 | 301.35 | 298.85 | 300.20 |
| 302.45 | 302.04 | 300.83 | 298.94 | 298.34 | 299.70 | 298.36 | 301.59 |
| 298.07 | 298.29 | 303.91 | 298.16 | 297.59 | 300.96 | 299.08 | 300.02 |
| 299.57 | 300.84 | 299.18 | 301.33 | 297.87 | 301.63 | 300.48 | 299.16 |
| 298.23 | 302.00 | 300.86 | 299.80 | | | | |

Como representar este conjunto de dados?
Criar **classes** (também denominadas categorias ou células) e contar ...

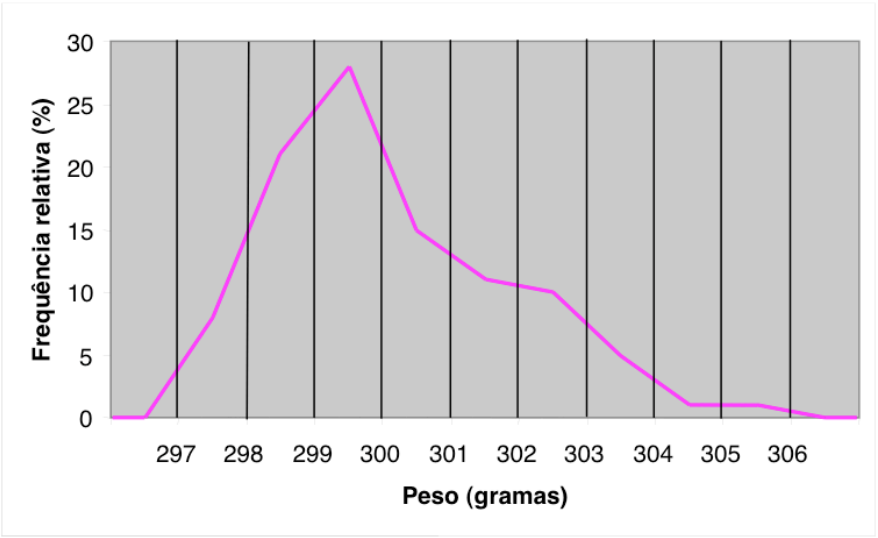
## Tabela de frequências (relativas)

| k | Limites | $f'_k(\%)$. | $fa'_k(\%)$. |
|---|---|---|---|
| 1 | $[297,0^+;298,0]$ | 8 | 8 |
| 2 | $[298,0^+;299,0]$ | 21 | 29 |
| 3 | $[299,0^+;300,0]$ | 28 | 57 |
| 4 | $[300,0^+;301,0]$ | 15 | 72 |
| 5 | $[301,0^+;302,0]$ | 11 | 83 |
| 6 | $[302,0^+;303,0]$ | 10 | 93 |
| 7 | $[303,0^+;304,0]$ | 5 | 98 |
| 8 | $[304,0^+;305,0]$ | 1 | 99 |
| 9 | $[305,0^+;306,0]$ | 1 | 100 |
| Total | | 100 | 100 |

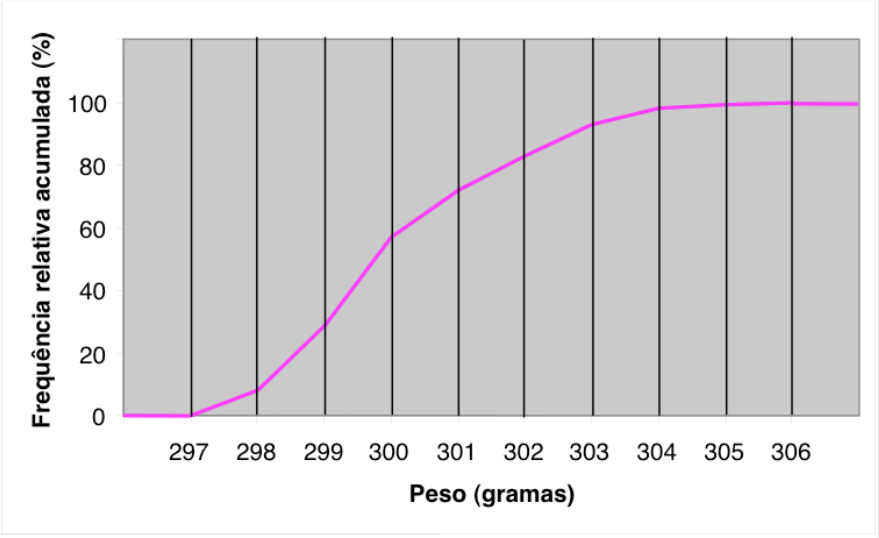
## Histograma de freq. relativas




## Polígono de frequências relativas



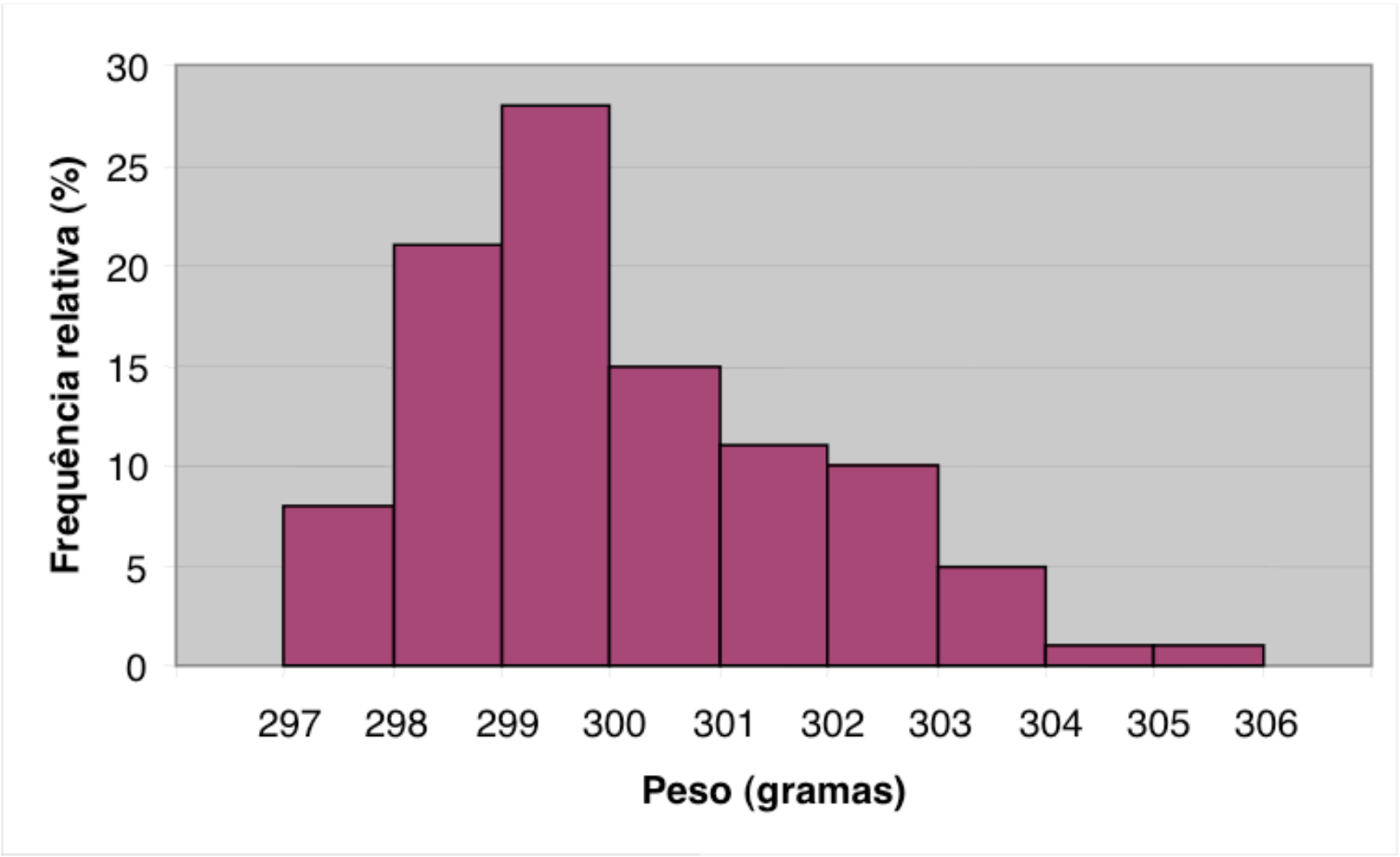

## Polígono de freq. relativas acum.



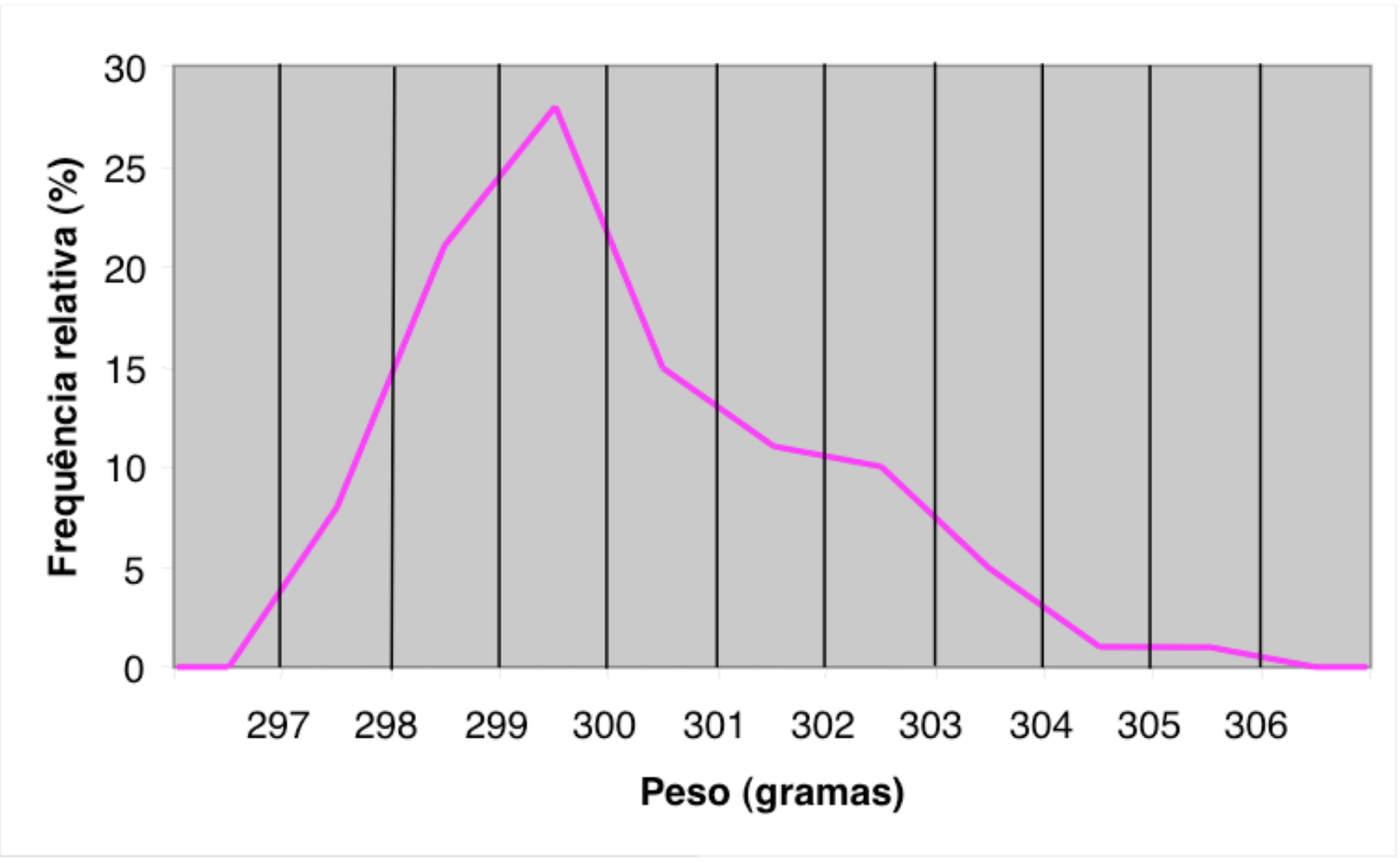
# Tabela de frequências (relativas)

| k | Limites | $f'_k(\%)$. | $fa'_k(\%)$. |
|---|---|---|---|
| 1 | $[297,0^+;298,0]$ | 8 | 8 |
| 2 | $[298,0^+;299,0]$ | 21 | 29 |
| 3 | $[299,0^+;300,0]$ | 28 | 57 |
| 4 | $[300,0^+;301,0]$ | 15 | 72 |
| 5 | $[301,0^+;302,0]$ | 11 | 83 |
| 6 | $[302,0^+;303,0]$ | 10 | 93 |
| 7 | $[303,0^+;304,0]$ | 5 | 98 |
| 8 | $[304,0^+;305,0]$ | 1 | 99 |
| 9 | $[305,0^+;306,0]$ | 1 | 100 |
| Total | | 100 | 100 |

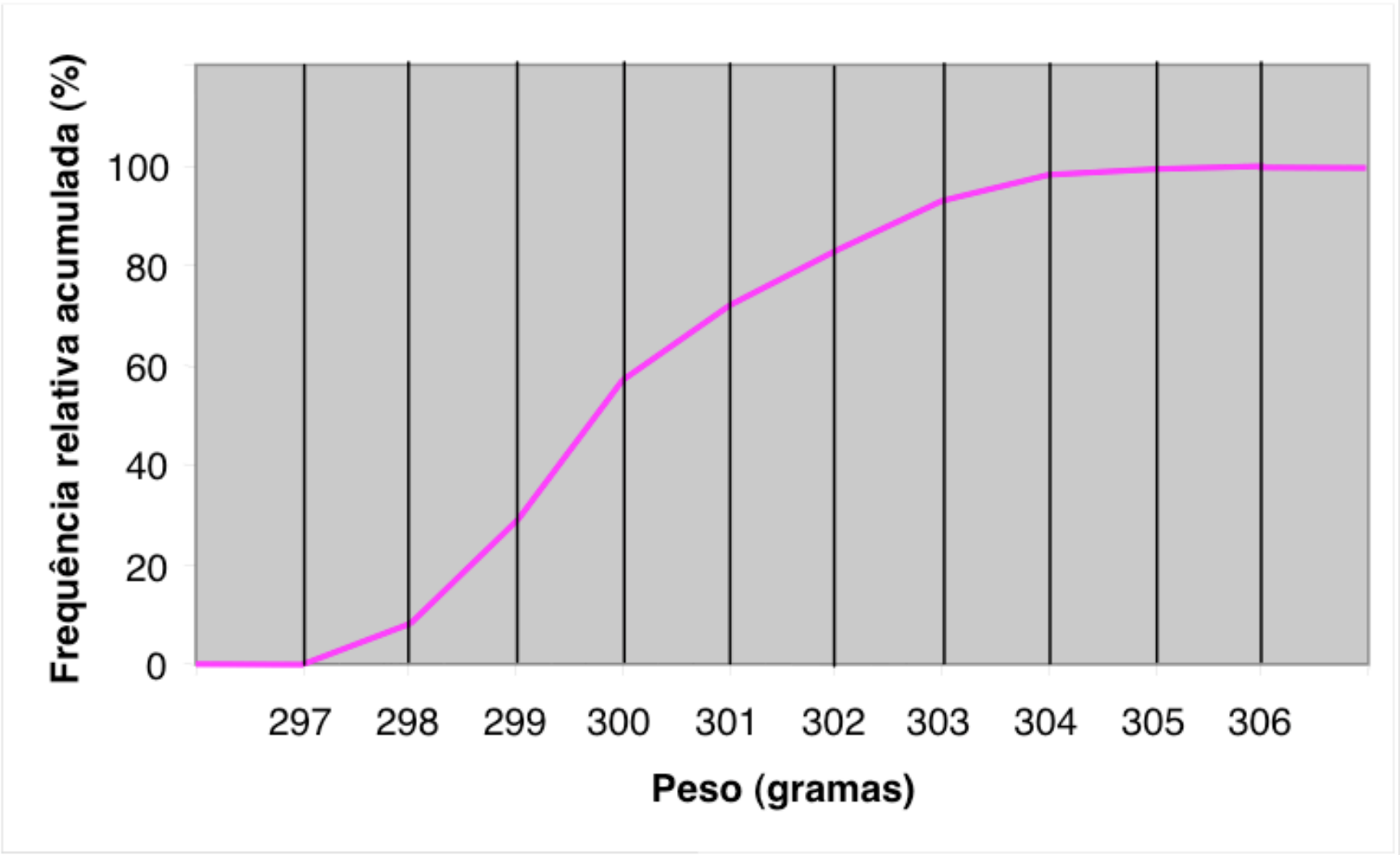
# Histograma de freq. relativas



# Polígono de frequências relativas



# Polígono de freq. relativas acum.



# Em quantas classes agrupar os dados?

# Em quantas classes agrupar os dados?

**Número de classes**

Não existe uma regra que permita definir inequivocamente o número de classes, existem sim algumas **regras práticas** e **bom senso**

- Regra do livro recomendado:

$$\text{Número de classes } (K) \approx \sqrt{\text{Número de dados}(N)}$$

- Número de classes não deve ser muito elevado sob pena de se perderem os benefícios da **síntese**, nem muito pequeno sob pena de se perder **detalhe** na representação

$$\text{Número de classes } (K) \text{ entre 5 e 20 classes}$$

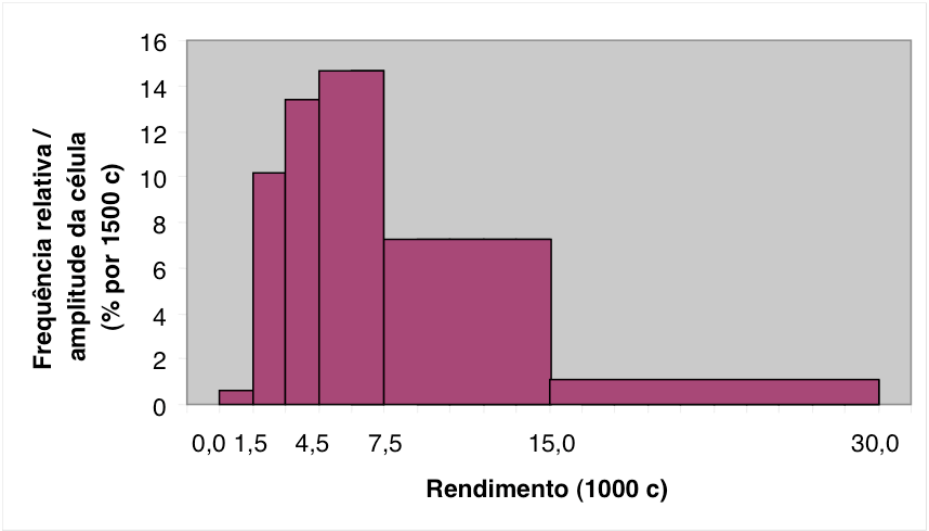
- Deve-se experimentar com diferentes números de classes e com diferentes limites para as classes (existem vantagens óbvias na utilização de números redondos)

(`http://www.shodor.org/interactivate/activities/Histogram/`)

# Classes de amplitude variável

- adequadas a distribuições de frequência com concentrações elevadas em alguns valores
- permitem homogeneizar o número de elementos em cada classe
- altura de cada barra do histograma ($h$) é proporcional à frequência por unidade de amplitude da classe

| Rendimentos colectáveis (contos) | | | Frequências relativas (%) |
|---|---|---|---|
| $0^+$ | – | 1500 | 0,6 |
| $1500^+$ | – | 3000 | 10,2 |
| $3000^+$ | – | 4500 | 13,4 |
| $4500^+$ | – | 7500 | 29,3 |
| $7500^+$ | – | 15000 | 36,4 |
| $15000^+$ | – | 30000 | 10,1 |
| Total | | | 100,0 |



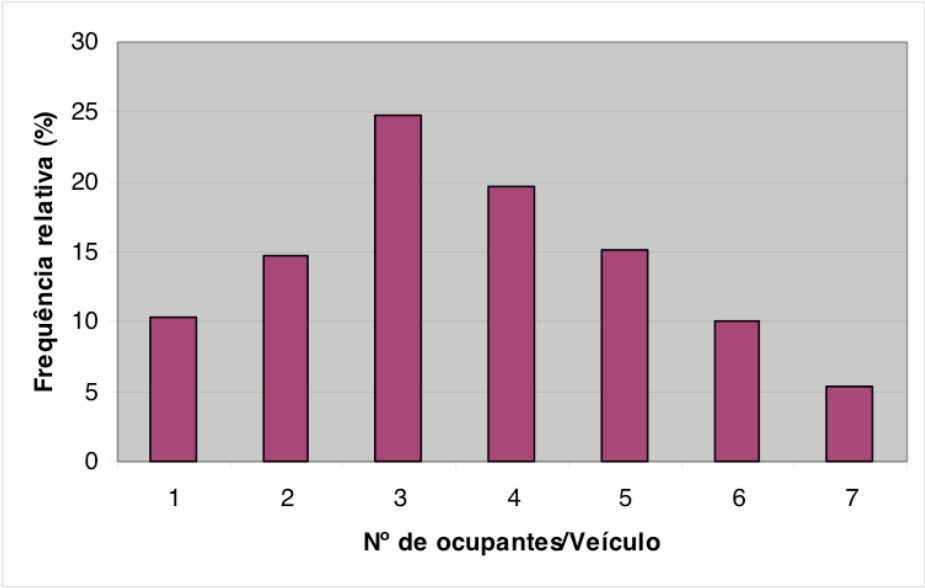

**Exemplo** (classe $15000^+$– 30000): $h = \frac{10.1}{\frac{30000-15000}{1500}} = \frac{10.1}{10} = 1.01$

Unidade de amplitude: 1500 (= amplitude da célula de menor amplitude)

# Representação de dados quantitativos discretos

- Conjunto de valores que os dados tomam é limitado (ou reduzido)
- Não é necessário definir classes (um valor $\longrightarrow$ uma classe)
- Representação por diagramas de barras

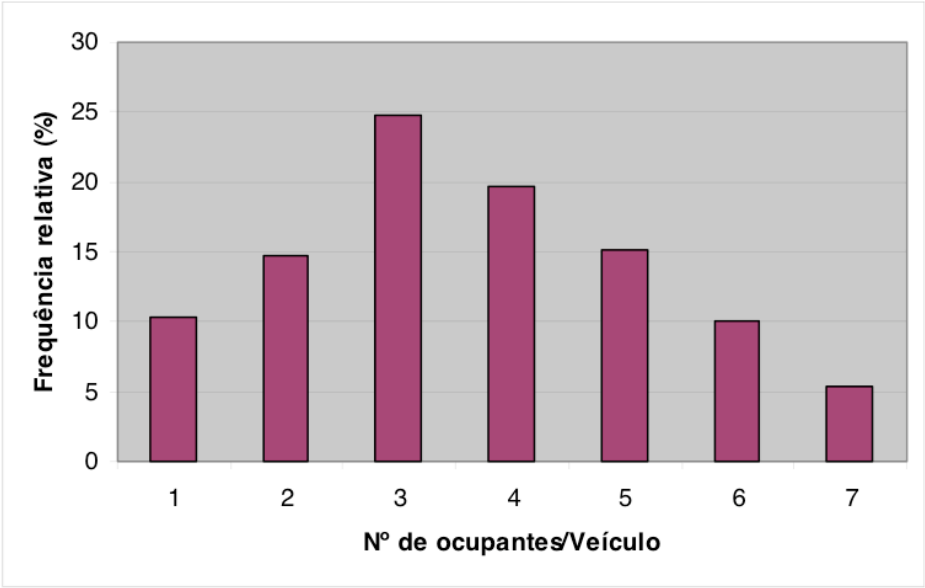
| Nº de ocupantes por veículo | Frequência absoluta | Frequência relativa (%) |
|---|---|---|
| 1 | 103 | 10,3 |
| 2 | 147 | 14,7 |
| 3 | 248 | 24,8 |
| 4 | 197 | 19,7 |
| 5 | 152 | 15,2 |
| 6 | 100 | 10,0 |
| 7 | 53 | 5,3 |
| Total | 1000 | 100,0 |



# Representação de dados quantitativos discretos

- Conjunto de valores que os dados tomam é limitado (ou reduzido)
- Não é necessário definir classes (um valor $\longrightarrow$ uma classe)
- Representação por diagramas de barras

| Nº de ocupantes por veículo | Frequência absoluta | Frequência relativa (%) |
|---|---|---|
| 1 | 103 | 10,3 |
| 2 | 147 | 14,7 |
| 3 | 248 | 24,8 |
| 4 | 197 | 19,7 |
| 5 | 152 | 15,2 |
| 6 | 100 | 10,0 |
| 7 | 53 | 5,3 |
| Total | 1000 | 100,0 |

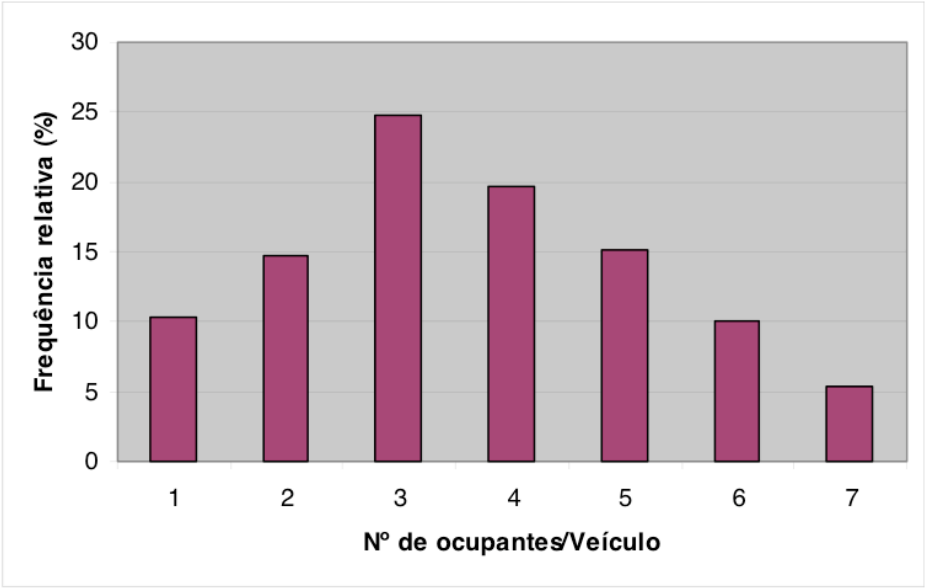



E se o conjunto de valores que os dados tomam for elevado?

# Representação de dados quantitativos discretos

- Conjunto de valores que os dados tomam é limitado (ou reduzido)
- Não é necessário definir classes (um valor $\longrightarrow$ uma classe)
- Representação por diagramas de barras

| Nº de ocupantes por veículo | Frequência absoluta | Frequência relativa (%) |
|---|---|---|
| 1 | 103 | 10,3 |
| 2 | 147 | 14,7 |
| 3 | 248 | 24,8 |
| 4 | 197 | 19,7 |
| 5 | 152 | 15,2 |
| 6 | 100 | 10,0 |
| 7 | 53 | 5,3 |
| Total | 1000 | 100,0 |




E se o conjunto de valores que os dados tomam for elevado?

$\Rightarrow$ proceder como nos dados contínuos (criar classes e usar histogramas)

# Estatísticas

- São **medidas** calculadas com base nos dados amostrais
- Descrevem globalmente o conjunto de valores que tais dados tomam
- **Objectivo**: traduzir em números o que se apreende da observação de uma tabela de frequências ou de um histograma

# Estatísticas

- São **medidas** calculadas com base nos dados amostrais
- Descrevem globalmente o conjunto de valores que tais dados tomam
- **Objectivo**: traduzir em números o que se apreende da observação de uma tabela de frequências ou de um histograma

- Estatísticas de **localização**
- Estatísticas de **dispersão**
- Outras estatísticas: **momentos** (ordinários e centrados), coeficientes de **assimetria** e de **achatamento**

# Estatísticas

- São **medidas** calculadas com base nos dados amostrais
- Descrevem globalmente o conjunto de valores que tais dados tomam
- **Objectivo**: traduzir em números o que se apreende da observação de uma tabela de frequências ou de um histograma

- Estatísticas de **localização**
- Estatísticas de **dispersão**
- Outras estatísticas: **momentos** (ordinários e centrados), coeficientes de **assimetria** e de **achatamento**

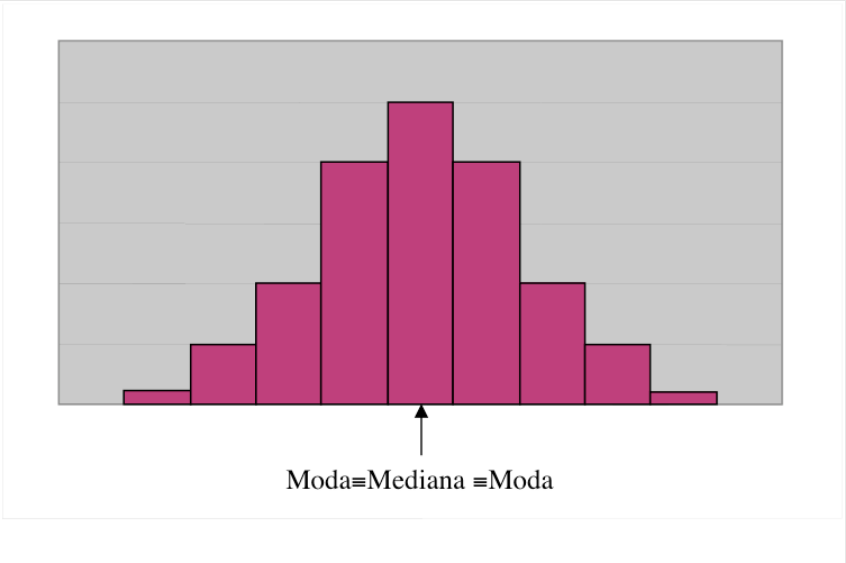
**Notas**

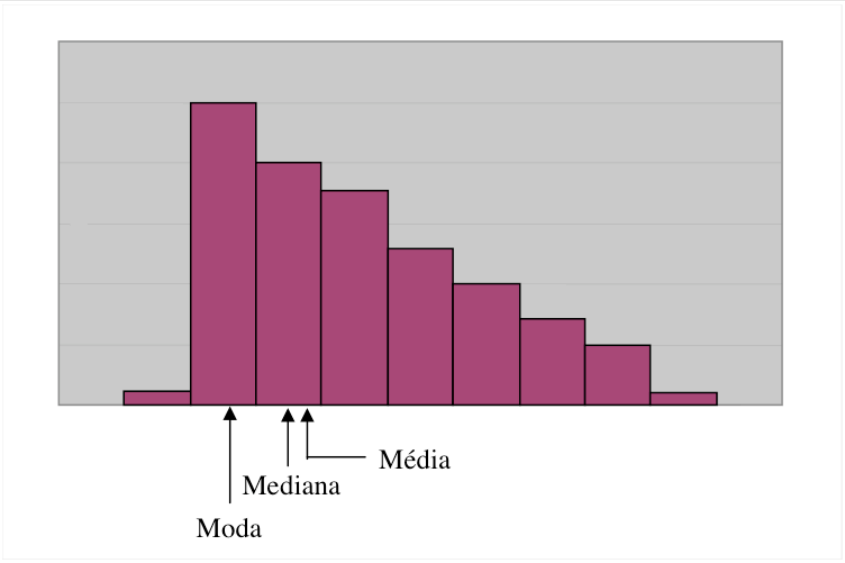
- Só se calculam estatísticas para dados quantitativos
- Dependendo do tipo de dados (discretos ou contínuos) e de como são apresentados (não agrupados, *i.e.* em bruto, ou agrupados em classes) existem fórmulas apropriadas para o cálculo de cada estatística

# Estatísticas de localização

- Pretendem indicar onde se concentram os dados de uma distribuição de frequências ou histograma

  $\longrightarrow$ **tendência central** ou **valor central**
- Principais estatísticas de localização: **Média**, **Mediana** e **Moda**



# Estatísticas de localização – Média amostral ($\bar{x}$)

**Média amostral ($\bar{x}$)**

- Valor **central** em relação aos dados

  (ponto de equilíbrio da distribuição de frequências ou histograma)

$\rightarrow$ média aritmética dos dados

**Dados não agrupados** (dados em bruto): $$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

**Dados discretos** (valores $x_k$): $$\overline{x} = \sum_{k=1}^{K} f_k \cdot x_k$$

**Dados contínuos agrupados** (em classes): $$\overline{x} = \sum_{k=1}^{K} f_k \cdot M_k$$

Notas

- $f_k$: frequência relativa, $M_k$: o ponto central da classe $k$
- dados agrupados apenas permitem cálculo aproximado, porquê?
- outras médias: geométrica, harmónica

## Propriedades da média amostral

- A média amostral toma um **valor central** em relação aos dados que constituem a amostra:

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n - \overline{x}) = \sum_{n=1}^{N} x_n - N\overline{x} = N\overline{x} - N\overline{x} = 0$$

- O valor da constante $C$, que **minimiza a soma dos desvios quadráticos** relativamente a $C$, é a média amostral:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}\sum_{n=1}^{N}(x_n - C)^2 = -2\sum_{n=1}^{N}(x_n - C) = 0 \Leftrightarrow C = \overline{x}$$

- Como a segunda derivada é sempre positiva, este valor minimiza de facto a soma dos desvios quadráticos:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}\sum_{n=1}^{N}(x_n - C)^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}\left[-2\sum_{n=1}^{N}(x_n - C)\right] = 2N > 0, \forall_C$$

# Estat. de localização – Mediana amostral (*Med*)

- Valor tal que cerca de metade dos dados são maiores a esse valor e os restantes são menores
- Medida mais adequada para representar o valor central em distribuições assimétricas com valores extremos atípicos (*outliers*)

Vector de dados $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ordenados por ordem crescente (ou decrescente), a **mediana amostral** (*Med*) vem

- para $N$ ímpar: $Med = x_{(N+1)/2}$
- para $N$ par: $Med = \dfrac{x_{N/2} + x_{N/2+1}}{2}$

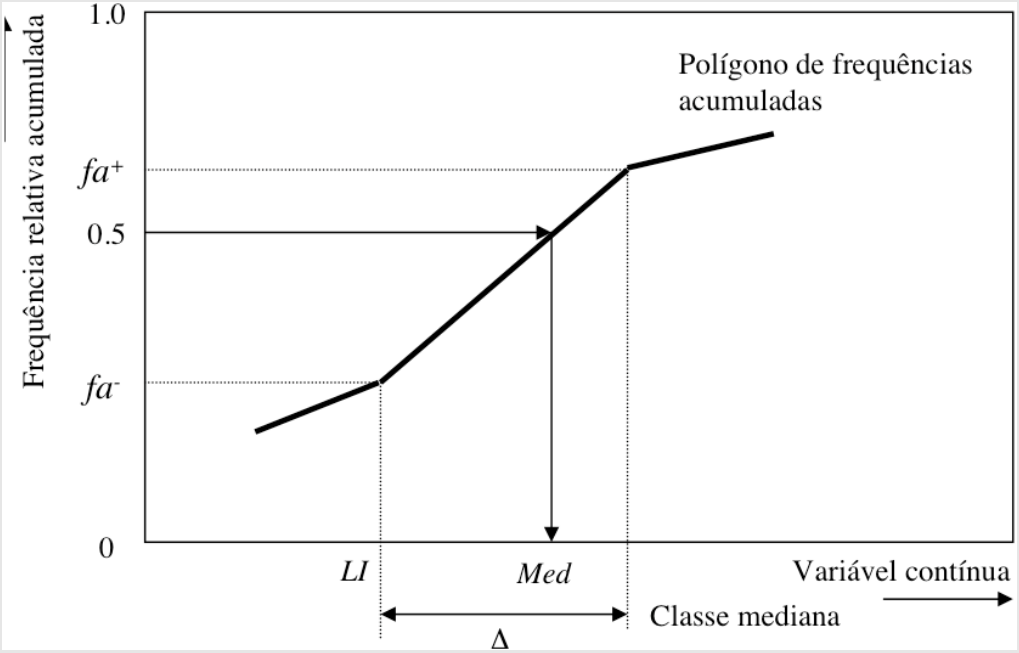
**Propriedade da mediana amostral**

A mediana é o valor que minimiza a soma dos desvios absolutos:

$$MIN \sum_{n=1}^{N} |x_n - C| \Rightarrow C = Med$$

## Mediana para dados contínuos agrupados

$$Med = LI + \frac{0.5 - fa^{-}}{fa^{+} - fa^{-}} \times \Delta = LI + \frac{0.5 - fa^{-}}{f} \times \Delta$$




- Classe mediana – classe onde a frequência acumulada ultrapassa 0.5
- Assume que as observações contidas na classe mediana se distribuem regularmente ao longo dessa mesma classe ⇒ **cálculo aproximado**

# Estat. de localização – Moda amostral (*Mod*)

- Valor ou gama de valores nos quais a concentração de dados é máxima
- Uma amostra pode ter mais do que uma moda (amostras **unimodais** *versus* **amostras multimodais**)

**Dados discretos** – Valor dos dados mais frequente
Se houver dois ou mais valores adjacentes para os quais a frequência seja máxima, a moda será a média desses valores

**Dados contínuos** – Ponto central da classe modal (classe com maior frequência) ou do conjunto de classes modais, se estas forem adjacentes
ou ...

**Dados contínuos** (cont.) – ter em atenção as frequências (absolutas ou relativas) da classe modal ($N_{Mod}$ ou $f_{Mod}$) e das classes que lhe são adjacentes ($N_1$ ou $f_1$ para a célula à esquerda e $N_2$ ou $f_2$ para a célula à direita)

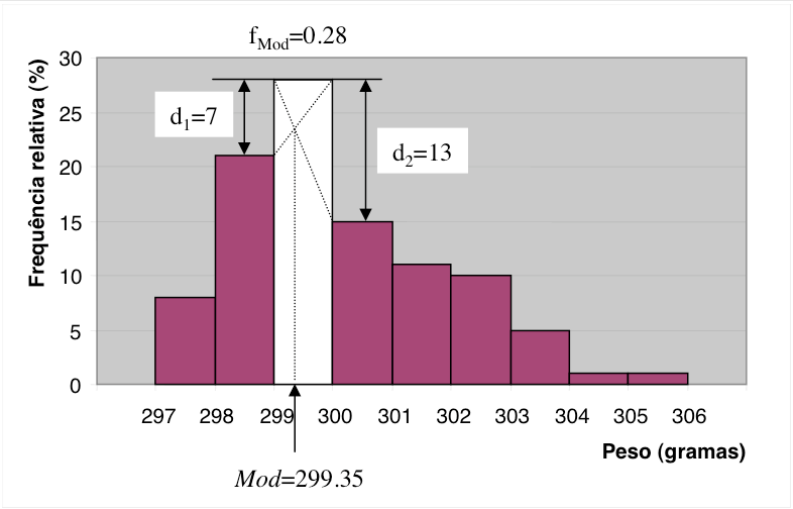
$$Mod = LI + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times \Delta$$

$LI$ – limite inferior da classe modal

$\Delta$ – amplitude da classe modal

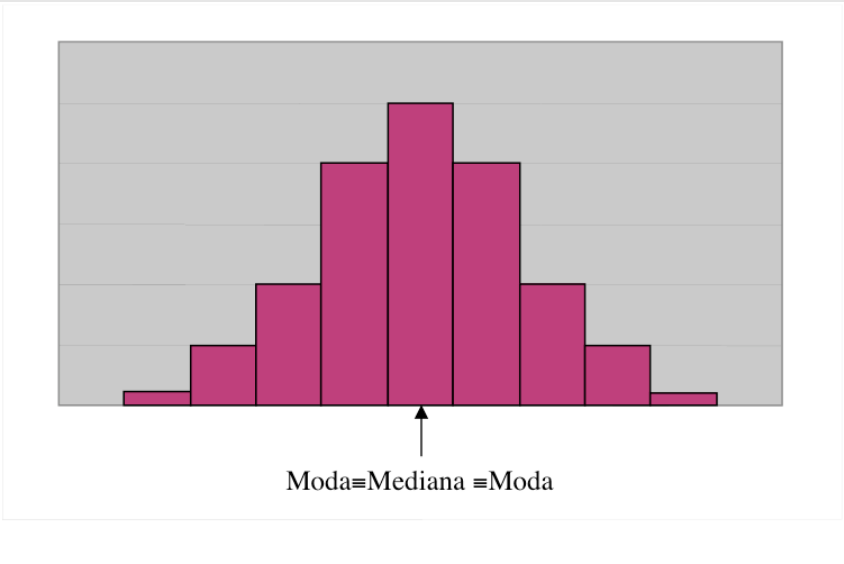
$d_1$: $(N_{Mod} - N_1)$ ou $(f_{Mod} - f_1)$

$d_2$: $(N_{Mod} - N_2)$ ou $(f_{Mod} - f_2)$

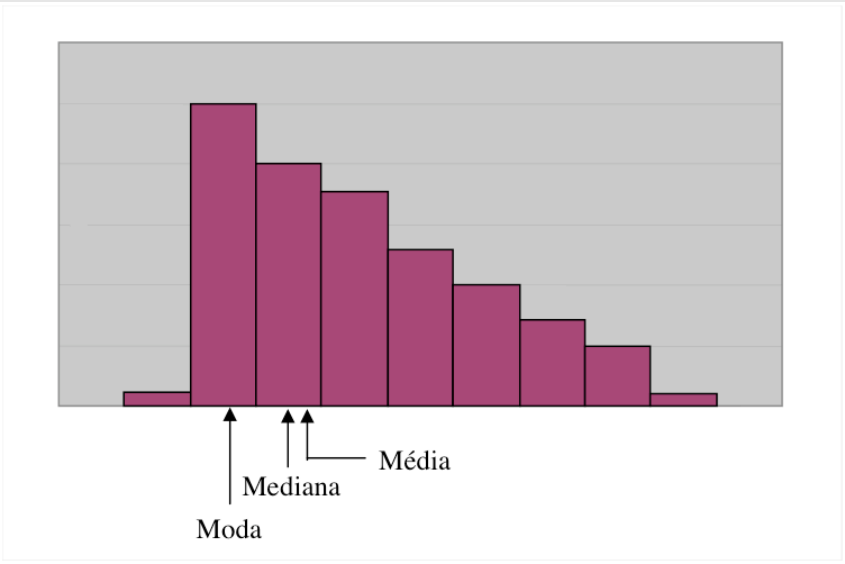


# Comparação entre média, mediana e moda

## Histograma simétrico




## Histograma assimétrico à direita

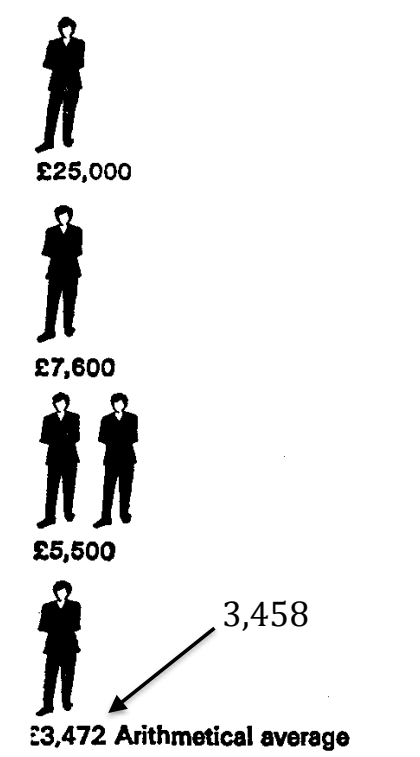


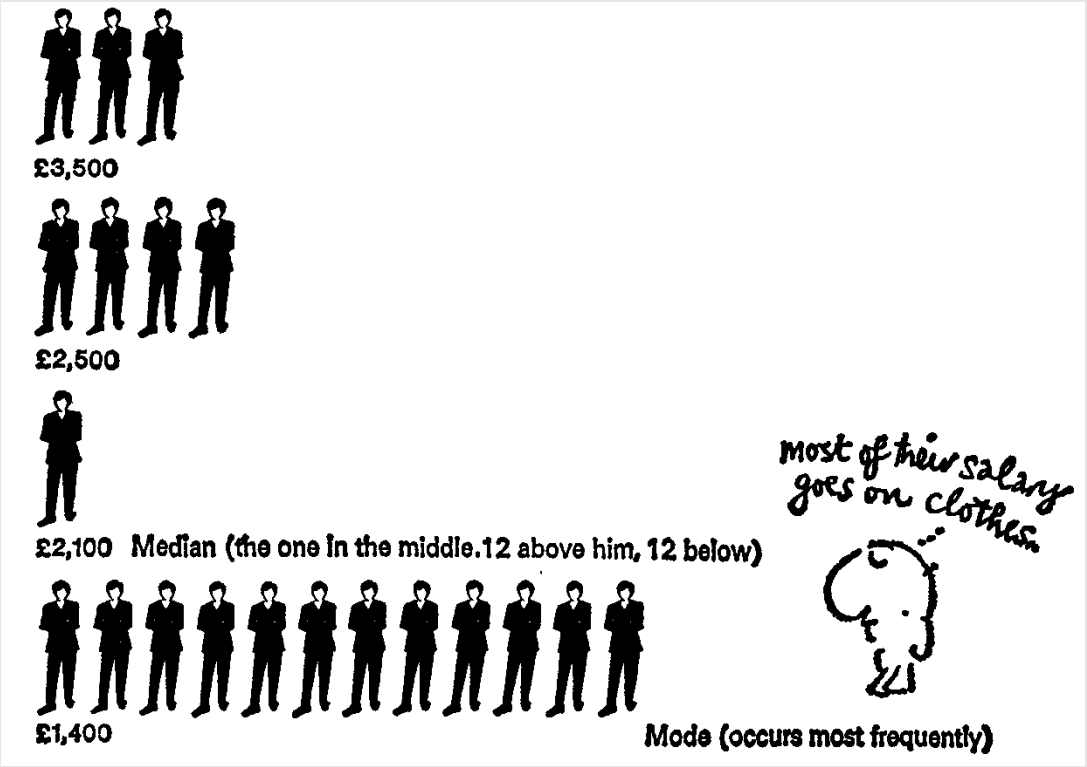

**Histograma simétrico:** $\bar{x} = Med = Mod$

**Histograma assimétrico unimodal à direita:** $\bar{x} > Med > Mod$ *

* Trata-se de uma regra prática que nem sempre se verifica (ver detalhes em `http://www.amstat.org/publications/jse/v13n2/vonhippel.html`)

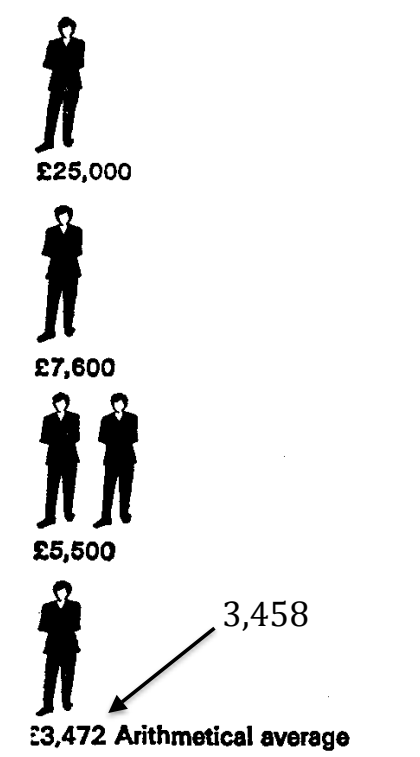
## Que medida de localização utilizar?

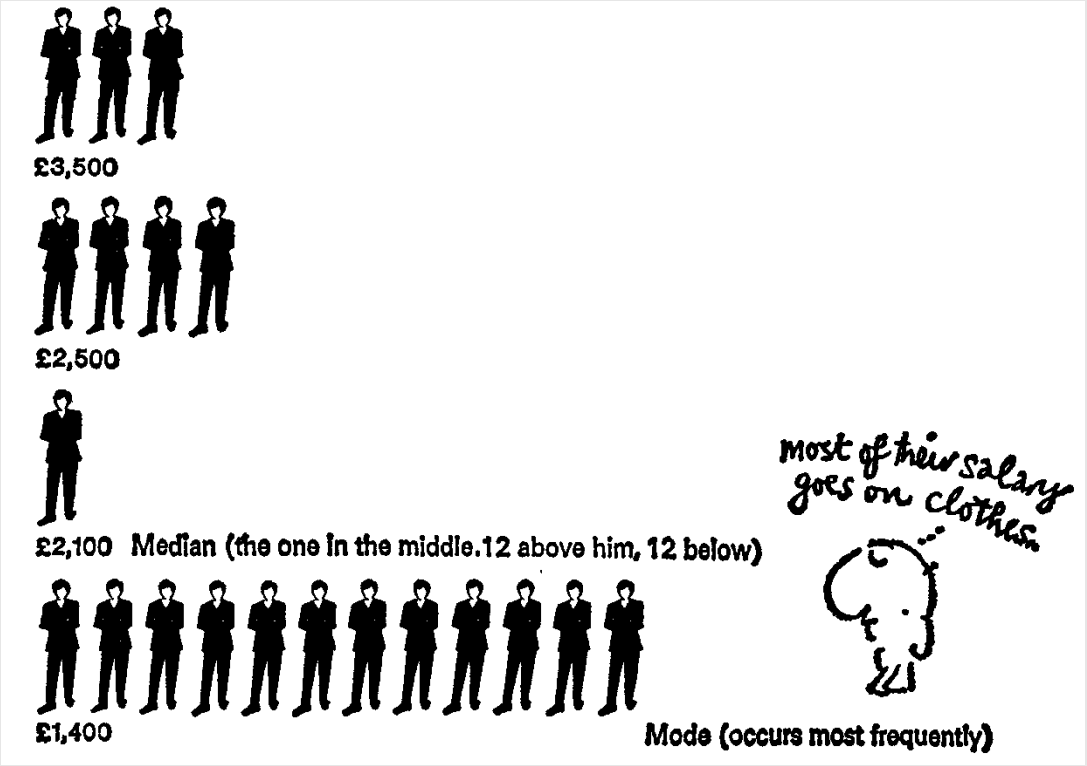



(Darrell Huff, "How to Lie with Statistics", Penguin Books, 1973)

## Que medida de localização utilizar?




(Darrell Huff, "How to Lie with Statistics", Penguin Books, 1973)

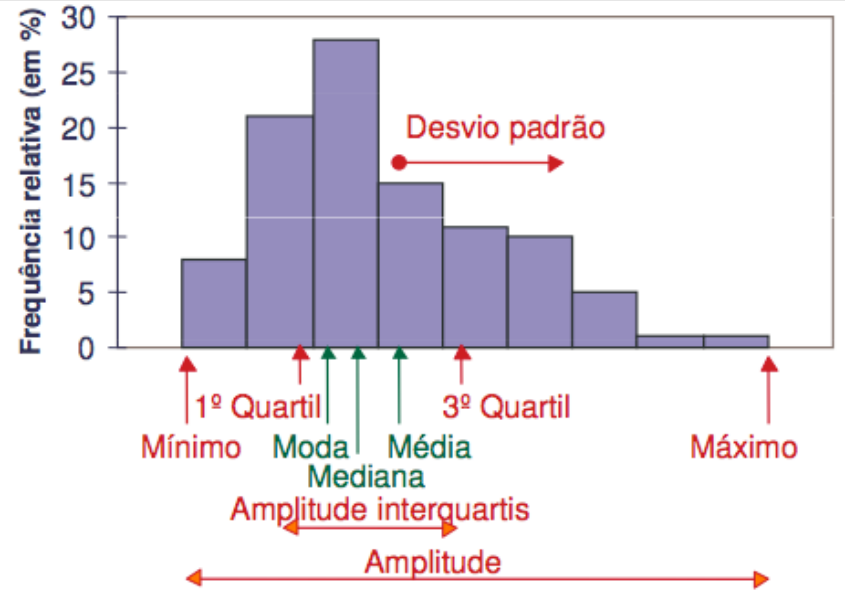
**Moda:** não é muito útil para dados contínuos não-agrupados (pode haver mais do que uma moda ou mesmo nenhuma)

**Mediana:** pouco afectada por valores extremos (utilizada como medida quando se pretende caracterizar por exemplo o rendimento da população)

**Média:** de longe a medida de localização mais utilizada, embora seja afectada por valores extremos (popularidade: por ser afectada por todos os valores e propriedades matemáticas atractivas para a inferência estatística)

# Estatísticas de dispersão

- Pretendem caracterizar a **variabilidade** de uma distribuição de frequências ou histograma
- Principais estatísticas de dispersão: **Amplitude**, **Amplitude e intervalo interquartis**, Desvio absoluto médio, Desvio quadrático médio, **Variância**, **Desvio padrão**, **Quartis** e **Percentis**




(Nóvoa, 2008)

# Estat. dispersão – Amplitude, Intervalo e Ampl. interquartis

**Amplitude ($A$)** – Diferença entre os valores máximo e mínimo dos dados

$$A = (x_n)_{MAX} - (x_n)_{MIN}$$

*Desvantagem:* afectada por valores extremos atípicos

**Intervalo interquartis (IIQ)** – Intervalo entre o $1^o$ e o $3^o$ quartil

$$IIQ = [Q1, Q3]$$

**Amplitude interquartis (AIQ)** – Diferença entre o $3^o$ e o $1^o$ quartil

$$AIQ = Q3 - Q1$$

# Estat. de dispersão – Desvio (absoluto) médio

- Média dos desvios absolutos dos dados em relação à média

**Dados não agrupados:** $DAM = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|x_n - \overline{x}|$

**Dados discretos agrupados:** $DAM = \sum_{k=1}^{K} f_k \cdot |x_k - \overline{x}|$

**Dados contínuos agrupados:** $DAM = \sum_{k=1}^{K} f_k \cdot |M_k - \overline{x}|$

**Notas**

- $f_k$: frequência relativa, $M_k$: o ponto central da classe $k$
- Dados agrupados apenas permitem cálculo aproximado, porquê?
- Porquê desvio absoluto?

# Estat. de dispersão – Desvio quadrático médio

- Média dos quadrados dos desvios dos dados em relação à média
- Dá maior peso a desvios maiores (devido ao quadrado)

**Dados não agrupados:** $DQM = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \overline{x})^2$

**Dados discretos agrupados:** $DQM = \sum_{k=1}^{K} f_k \cdot (x_k - \overline{x})^2$

**Dados contínuos agrupados:** $DQM = \sum_{k=1}^{K} f_k \cdot (M_k - \overline{x})^2$

**Notas**

- Preferível ao DAM (maior facilidade de manipulação matemática)
- Utilização do valor central da classe em dados agrupados leva à sobreavliação sistemática do DQM $\Rightarrow$ **Correcção de Sheppard**

## Correcção de Sheppard

- Tomar o ponto médio da classe $M_k$, no caso de dados contínuos agrupados, é um procedimento já adoptado no cálculo da média amostral e do desvio absoluto médio.
- No cálculo da média e da mediana não se introduz qualquer erro sistemático, pois os desvios introduzidos por pontos abaixo do ponto médio $M_k$ tendem a ser compensados por desvios de sinal contrário introduzidos por pontos acima de $M_k$, isto é, se nuns casos se subavalia noutros sobreavalia-se.
- No cálculo do $DQM$, ao elevar-se ao quadrado os desvios, tende-se a sobreavaliar sistematicamente o $DQM$.
- Para histogramas unimodais, com classes de igual amplitude $\Delta$, com a classe modal relativamente afastada dos valores extremos dos dados e com classes progressivamente decrescentes nas caudas (histograma em forma de sino), este efeito pode ser minorado pela introdução de um termo negativo no cálculo do $DQM$ – a correcção de Sheppard (para o desvio quadrático médio):

$$DQM = \sum_{k=1}^{K} f_k (M_k - \overline{x})^2 - \frac{\Delta^2}{12}$$

# Estatísticas de dispersão – Variância amostral

- Semelhante ao *DQM* mas divide-se por $N-1$ em vez de $N$

$$s^2 = \frac{N}{N-1} \cdot DQM$$

**Dados não agrupados:** $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (x_n - \overline{x})^2$

**Dados discretos agrupados:** $s^2 = \frac{N}{N-1} \sum_{k=1}^{K} f_k (x_k - \overline{x})^2$

**Dados contínuos agrupados:** $s^2 = \frac{N}{N-1} \sum_{k=1}^{K} f_k (M_k - \overline{x})^2$

**Porquê dividir por $N-1$?**

Para fazer inferências sobre a população a partir de valores de amostras.
A justificar quando se abordar a estimação pontual

# Estatísticas de dispersão – Desvio padrão amostral

- Desvio padrão amostral ($s$) é igual à raiz quadrada da variância amostral ($s^2$)

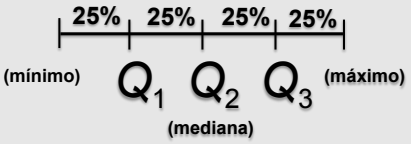
$$s = \sqrt{s^2}$$

- Preferível em relação à variância amostral por se exprimir nas mesmas unidades que os dados a partir dos quais é calculada
- Interpretável como o valor absoluto de um desvio *típico* dos dados em relação à média amostral
- Da mesma ordem de grandeza do desvio absoluto médio (DAM)

# Estat. de dispersão – Quartis e Percentis

## Quartis ($Q_1$, $Q_2$. $Q_3$)

Dividem um conjunto **ordenado** de dados em 4 segmentos com igual número de elementos




## Cálculo dos quartis (livro recomendado)

Vector de dados $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ordenados por ordem crescente (ou decrescente), a posição do $1^o$ e $3^o$ quartil vem

$$pos(Q1) = \frac{N+1}{4} \qquad pos(Q2) = \frac{2(N+1)}{4} \qquad pos(Q3) = \frac{3(N+1)}{4}$$

- Se $pos(Q_i)$ é um número inteiro então $Q_i = x_{pos(Q_i)}$
- Senão $Q_i$ é igual à média entre os dois valores correspondentes às posições mais próximas $\left(Q_i = (x_{\lfloor pos(Q_i) \rfloor} + x_{\lceil pos(Q_i) \rceil})/2\right)$

# Estat. de dispersão – Quartis e Percentis (cont.)

Não há uma regra única para o cálculo dos quartis. Outras regras:

- arredondar posição para o valor inteiro mais próximo
- média pesada dos valores correspondentes às posições mais próximas

$\Rightarrow$ na prática só se notam diferenças significativas para conjuntos de dados de pequenas dimensões

**Exemplo:**

Dados ordenados ($N = 11$): $11, 12, 13, 16, 16, 17, 18, 19, 21, 21, 22$

**Percentis ($P_1, P_2, \ldots, P_{99}$)**

- Dividem o conjunto de dados em 100 grupos, com cerca de 1% de valores em cada grupo

$$\text{Percentil do valor } X = \frac{\text{número de valores inferiores a } X}{\text{número total de valores}}\%$$

# Outras estatísticas – Momentos amostrais

**Momentos ordinários ($m'_i$), ou em relação à origem, de ordem $i$**

**Dados não agrupados:** $$m'_i = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n)^i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

**Dados discretos agrupados:** $$m'_i = \sum_{k=1}^{K} f_k(x_k)^i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

**Dados contínuos agrupados:** $$m'_i = \sum_{k=1}^{K} f_k(M_k)^i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

- A média amostral corresponde ao momento ordinário de primeira ordem:

$$m'_1 = \overline{x}$$

# Outras estatísticas – Momentos amostrais (cont.)

**Momentos centrados ($m_i$), ou em relação à média, de ordem $i$**

**Dados não agrupados:** $$m_i = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \overline{x})^i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

**Dados discretos agrupados:** $$m_i = \sum_{k=1}^{K} f_k(x_k - \overline{x})^i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

**Dados contínuos agrupados:** $$m_i = \sum_{k=1}^{K} f_k(M_k - \overline{x})^i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

- O momento centrado de 1ª ordem é sempre nulo e o momento centrado de 2ª ordem corresponde ao desvio quadrático médio:

$$m_1 = 0 \qquad \wedge \qquad m_2 = DQM$$

# Outras estatísticas – Momentos amostrais (cont.)

**Relação entre momentos ordinários e momentos centrados**

Qualquer momento centrado de ordem $i$ pode ser expresso em função dos momentos ordinários de ordem não superior a $i$, por exemplo:

- $m_2 = m'_2 - (m'_1)^2$
- $m_3 = m'_3 - 3m'_2 m'_1 + 2(m'_1)^3$
- $m_4 = m'_4 - 4m'_3 m'_1 + 6m'_2 (m'_1)^2 - 3(m'_1)^4$

- Os momentos centrados não contêm mais informação que os momentos ordinários. A utilização de uma ou outra forma depende da facilidade do cálculo e da facilidade de interpretação de um ou outro

- Embora a definição não imponha limites à ordem dos momentos, raramente se calculam momentos de ordem superior a 4 pois a partir daí são extremamente difícies de interpretar

## Momento centrado de 3ª ordem – desvio cúbico médio ($m_3$)

- Mede a **assimetria** com que os dados se distribuem em torno da média
- Dados assimétricos à direita darão origem a um $m_3$ positivo enquanto uma assimetria à esquerda originará $m_3$ negativo
- A correcção de Sheppard não é necessária (nem útil) por a ordem do momento ser ímpar (não há sobreavaliação sistemática)

## Coeficiente de assimetria ($g_1$)

- Para fazer inferências sobre populações a partir de amostras deve-se substituir $m_3$ por $k_3$:

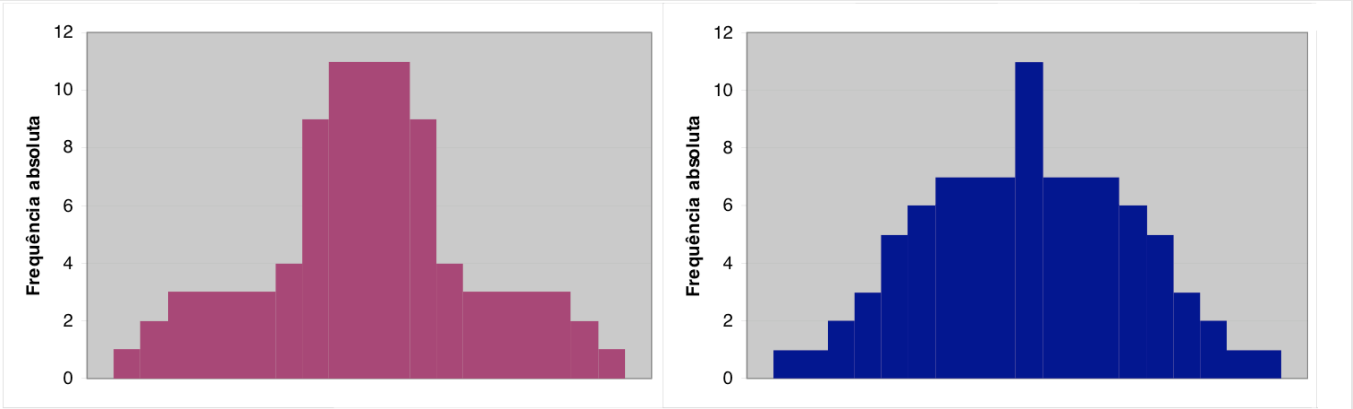
$$k_3 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} m_3$$

- Para $N$ grande $k_3$ e $m_3$ praticamente não se distinguem
- Habitualmente usa-se uma medida adimensional, o **coeficiente de assimetria** ($g_1$), em vez de $k_3$ directamente:

$$g_1 = \frac{k_3}{s^3}$$

## Momento centrado de 4ª ordem ($m_4$)

- A característica a que está associado este momento é a **kurtose** – medida de concentração dos dados em torno da média (**achatamento**)
- Exemplo: Amostras de igual dimensão, com iguais medidas de localização, de dispersão e de simetria mas diferentes kurtoses:




- A correcção de Sheppard para o quarto momento tem a seguinte expressão (nas condições anteriormente expostas):

$$CS(m_4) = \frac{\Delta^2}{2} \sum_{k=1}^{K} f_k (M_k - \overline{x})^2 - \frac{7\Delta^4}{240}$$

## Coeficiente de kurtose ($g_2$)

- **Alternativa**: Utilizar $m_4 - 3m_2^2$ como medida de kurtose
- **Porquê?** Para a distribuição Normal $m_4 = 3 \cdot m_2^2$. Então a medida de kurtose de uma amostra pode ser lida relativamente à kurtose da população normal: superior, igual ou inferior, conforme é maior, igual ou menor do que zero.
- **Ajuste de $m_4$ a inferências em relação a uma população**

$$k_4 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)(N-3)}[(N+1)m_4 - 3(N-1)m_2^2]$$

- **Reescalamento de $k_4$ – o coeficiente de kurtose**

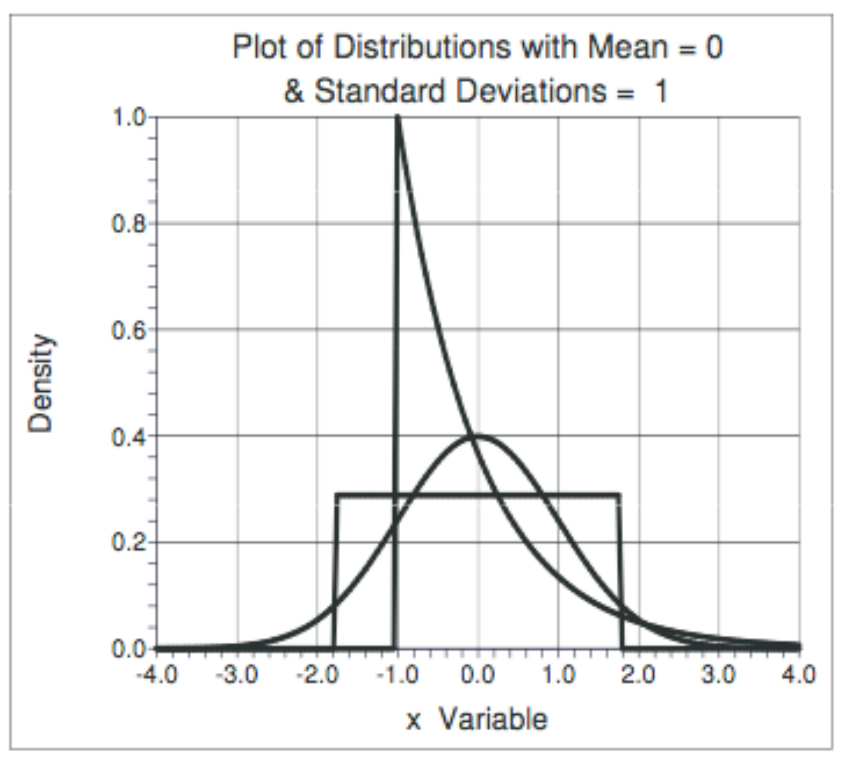
$$g_2 = \frac{k_4}{s^4} = \frac{N^2(N+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \times \frac{m_4}{s^4} - 3\frac{(N-1)^2}{(N-2)(N-3)}$$

- Para valores de $N$ elevados o coeficiente de kurtose aproxima-se de:

$$g_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3$$

# Porquê momentos de ordem superior a dois?

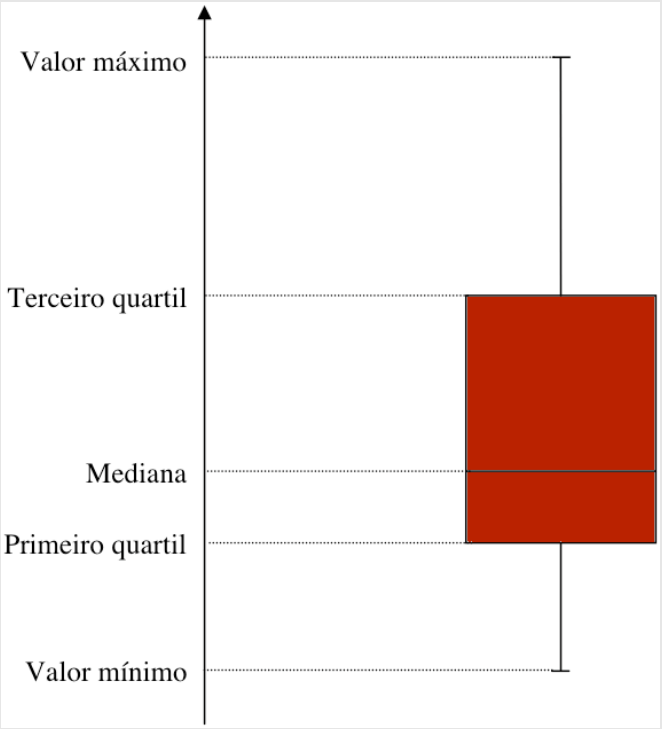
⇒ A média e o desvio padrão (ou a variância) não são suficientes para distinguir distribuições



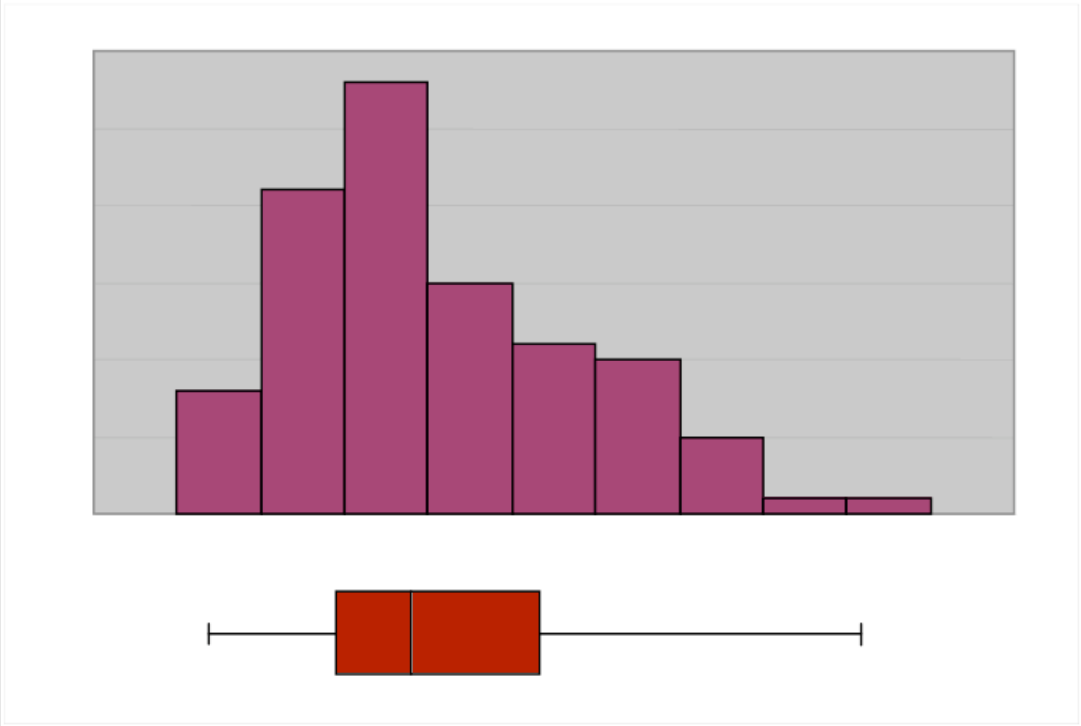

(Nóvoa, 2008)

# Representação gráfica de estatísticas

## Diagrama do tipo caixa




## Histograma e diagrama do tipo caixa



- Não existe uma forma única para o diagrama do tipo caixa
- A forma apresentada é a forma básica do diagrama do tipo caixa
- Formas mais elaboradas permitem identificar potenciais valores extremos atípicos (*outliers*)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 37 | 31 | 31 | 28 | 27 | 24 | 23 | 23 | 22 | 22 |
| 21 | 21 | 21 | 21 | 20 | 20 | 20 | 19 | 19 | 18 | 18 |
| 18 | 18 | 17 | 17 | 14 | 14 | 14 | 13 | 11 | 11 | 10 |

$N = 33$ $\quad$ $Q_3 = 23.0$

$Max = 50.0$ $\quad$ $Med = 20.0$

$Min = 10.0$ $\quad$ $Q_1 = 17.0$

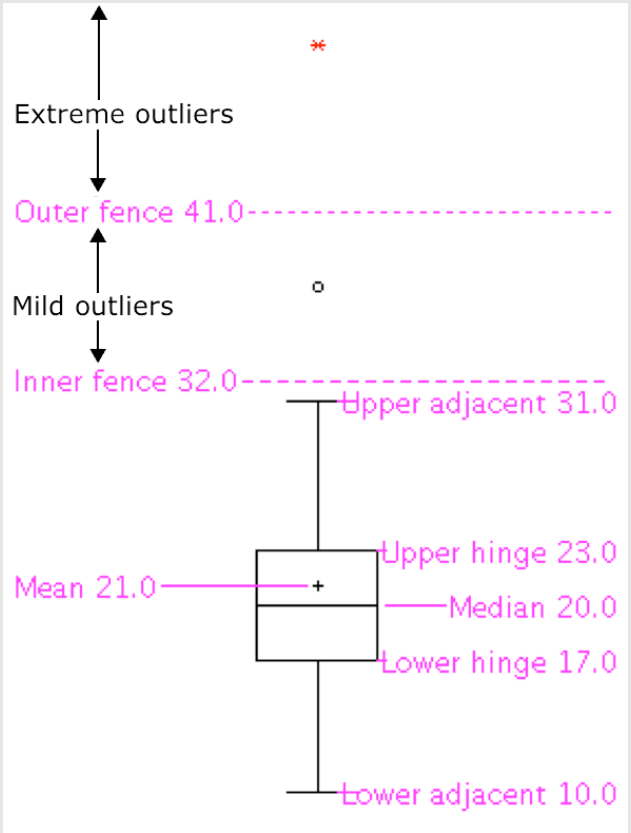
$\bar{x} = 21.0$ $\quad$ $AIQ = Q_3 - Q_1 = 6.0$

$$UpperOuterFence = Q_3 + 3 \cdot AIQ = 41.0$$

$$UpperInnerFence = Q_3 + 1.5 \cdot AIQ = 32.0$$

$$LowerInnerFence = Q_1 - 1.5 \cdot AIQ = 8.0$$

$$LowerOuterFence = Q_1 - 3 \cdot AIQ = -1.0$$



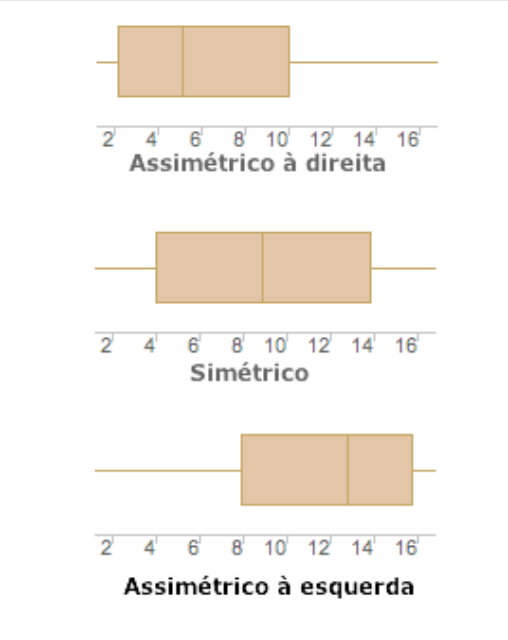

(*onlinestatbook*)

(http://onlinestatbook.com/chapter2/boxplot_demo.html)

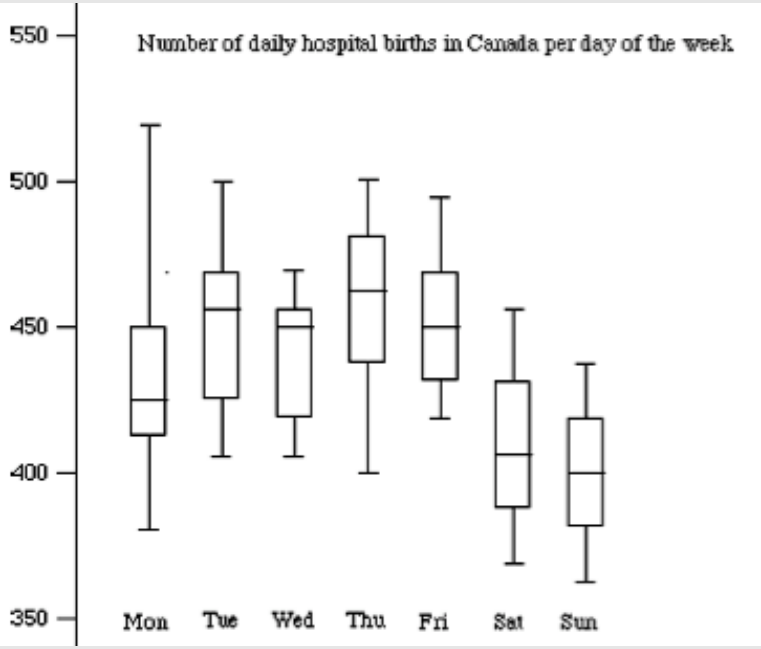
- Valores extremos atípicos podem ser causados por erros inerentes ao processo de aquisição de dados
- Podem influenciar bastante o valor de algumas estatísticas

# Interpretação de diagramas do tipo caixa

- a caixa central inclui 50% dos dados (os 50% centrais)
- os "bigodes" mostram a amplitude dos dados
- a simetria é indicada pela caixa central, "bigodes" e valor médio
- comparação entre diferentes grupos $\longrightarrow$ construção de diagramas do tipo caixa lado a lado (ver caracterização de amostras bivariadas)




(*StatTrek*)




(*Schwarz, 2006*)

# Como lidar com valores extremos (*outliers*)?

Duas alternativas:

## (a) Utilizar medidas resistentes

**Medidas resistentes:** pouco sensíveis a valores extremos atípicos (baseadas em ordenações – quartis, mediana, *trimean*, *trimmean*, ...)

Notas:

- *trimean*: $TM = (Q1 + 2Q2 + Q3)/4$
- o *trimmean* é uma função do *Excel* que calcula a média ignorando uma percentagem dos valores mais extremos

**Medidas não resistentes:** são sensíveis a valores extremos atípicos (consideram sempre todos os valores – média, DQM, variância, ...)

## (b) Eliminar *outliers*

1. Identificar possíveis valores extremos atípicos
2. Verificar cada um dos valores extremos atípicos (erro de medida?)
3. Corrigir ou Eliminar valores extremos atípicos confirmados
4. Calcular as estatísticas amostrais pretendidas

# Caracterização e Representação de Dados Bivariados

# Caracterização e Representação de Dados Bivariados

**Amostra bivariada**

Amostra constituída por **pares ordenados** de dados (medem-se 2 atributos diferentes do mesmo objecto)

- Para além da análise univariada a cada um dos atributos ...
- Pretende-se também **analisar as interacções** entre os dois atributos

**Dados qualitativos:**

- Tabela de informação cruzada
- Diagramas de barras sobrepostas

**Dados quantitativos:**

- Diagrama (x, y)
- Coeficientes de correlação e de determinação

**Dados mistos:**

- Um dos atributos é quantitativo e o outro é qualitativo

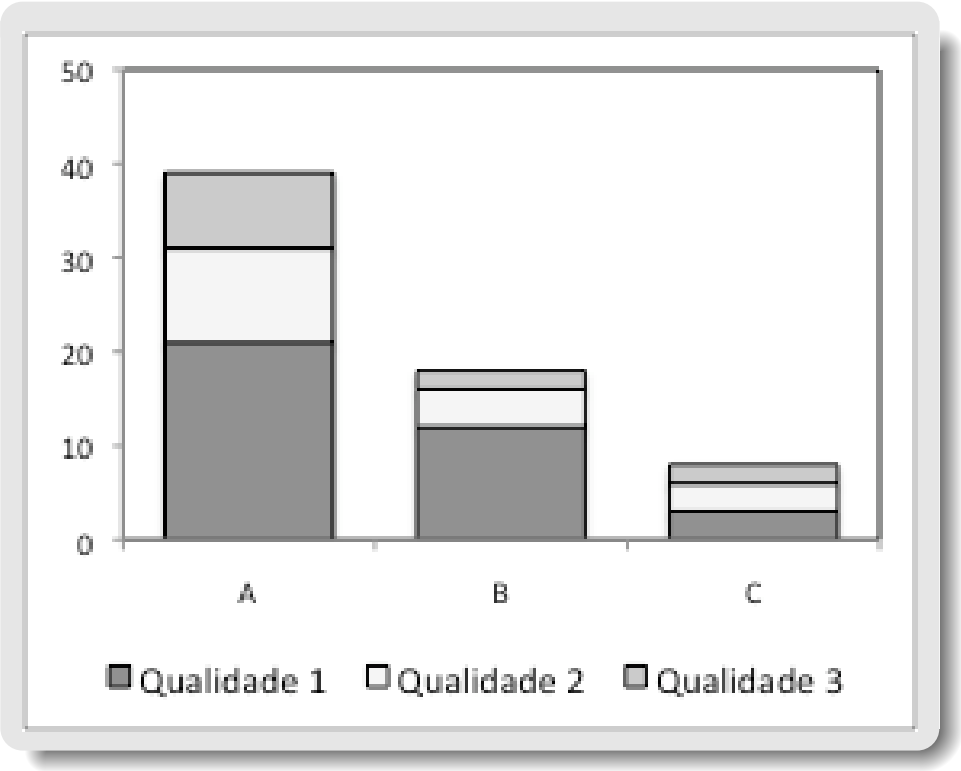
# Dados qualitativos – Tabela de inform. cruzada

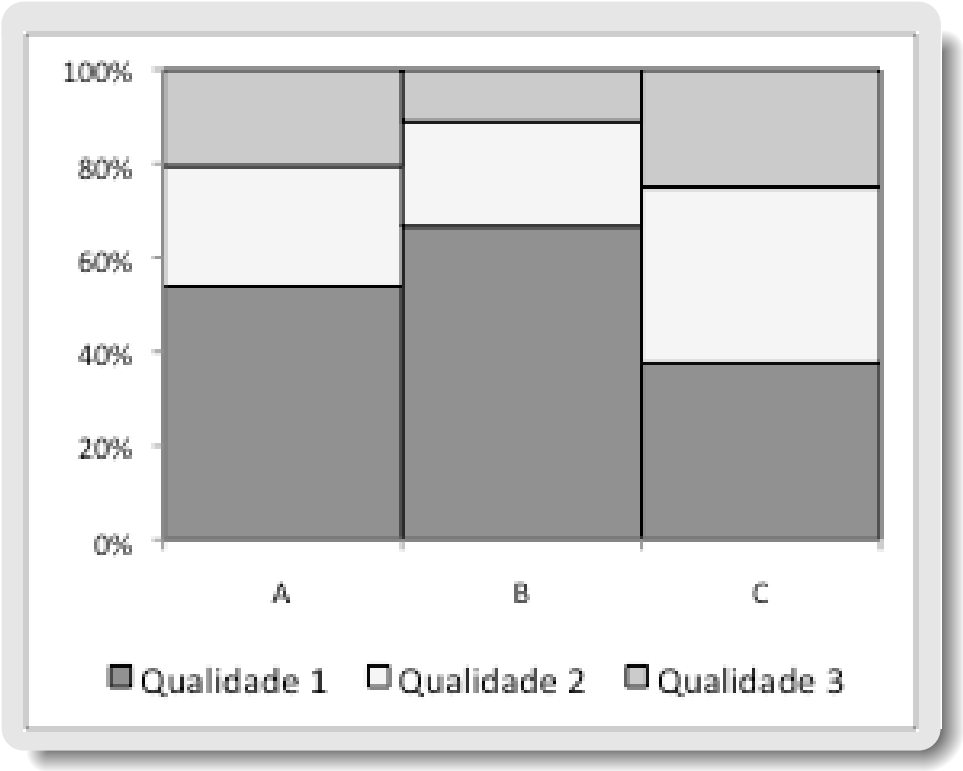
*Nota*: também conhecida como tabela de contingência

| | Qualidade das entregas | | | |
|---|---|---|---|---|
| Distribuidor | 1 | 2 | 3 | Total da linha |
| A | 21 | 10 | 8 | 39 |
| | 32.3% | 15.4% | 12.3% | 60.0% |
| | 53.8% | 25.6% | 20.5% | 100.0% |
| | 58.3% | 58.8% | 66.7% | – |
| B | 12 | 4 | 2 | 18 |
| | 18.5% | 6.2% | 3.1% | 27.7% |
| | 66.7% | 22.2% | 11.1% | 100.0% |
| | 33.3% | 23.5% | 16.7% | – |
| C | 3 | 3 | 2 | 8 |
| | 4.6% | 4.6% | 3.1% | 12.3% |
| | 37.5% | 37.5% | 25.0% | 100.0% |
| | 8.3% | 17.6% | 16.7% | – |
| Total | 36 | 17 | 12 | 65 |
| da coluna | 55.4% | 26.2% | 18.5% | 100.0% |
| | 100.0% | 100.0% | 100.0% | – |

Em cada célula figuram, de cima para baixo: n$^o$ de observações, % do n$^o$ total de observações, % do n$^o$ de observ. da linha e % do n$^o$ de observ. da coluna

# Dados qualitativos – Diagr. de barras sobrepostas




**Nota** o diagrama da direita também é conhecido como diagrama mosaico

# Dados qualitativos – Paradoxo de Simpson

Business School

| | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 480 = 80% | 120 = 20% |
| Female | 180 = 90% | 20 = 10% |

Law School

| | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 10 = 10% | 90 = 90% |
| Female | 100 = 33% | 200 = 67% |

# Dados qualitativos – Paradoxo de Simpson

Business School

| | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 480 = 80% | 120 = 20% |
| Female | 180 = 90% | 20 = 10% |

Law School

| | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 10 = 10% | 90 = 90% |
| Female | 100 = 33% | 200 = 67% |

- Aparentemente a taxa de admissão de mulheres é mais alta quer na Business school quer na Law school

# Dados qualitativos – Paradoxo de Simpson

Business School

| | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 480 = 80% | 120 = 20% |
| Female | 180 = 90% | 20 = 10% |

Law School

| | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 10 = 10% | 90 = 90% |
| Female | 100 = 33% | 200 = 67% |

- Aparentemente a taxa de admissão de mulheres é mais alta quer na Business school quer na Law school

Business and Law Schools

| | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 490 = 70% | 210 = 30% |
| Female | 280 = 56% | 220 = 44% |

# Dados qualitativos – Paradoxo de Simpson

| Business School | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 480 = 80% | 120 = 20% |
| Female | 180 = 90% | 20 = 10% |

| Law School | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 10 = 10% | 90 = 90% |
| Female | 100 = 33% | 200 = 67% |

- Aparentemente a taxa de admissão de mulheres é mais alta quer na Business school quer na Law school

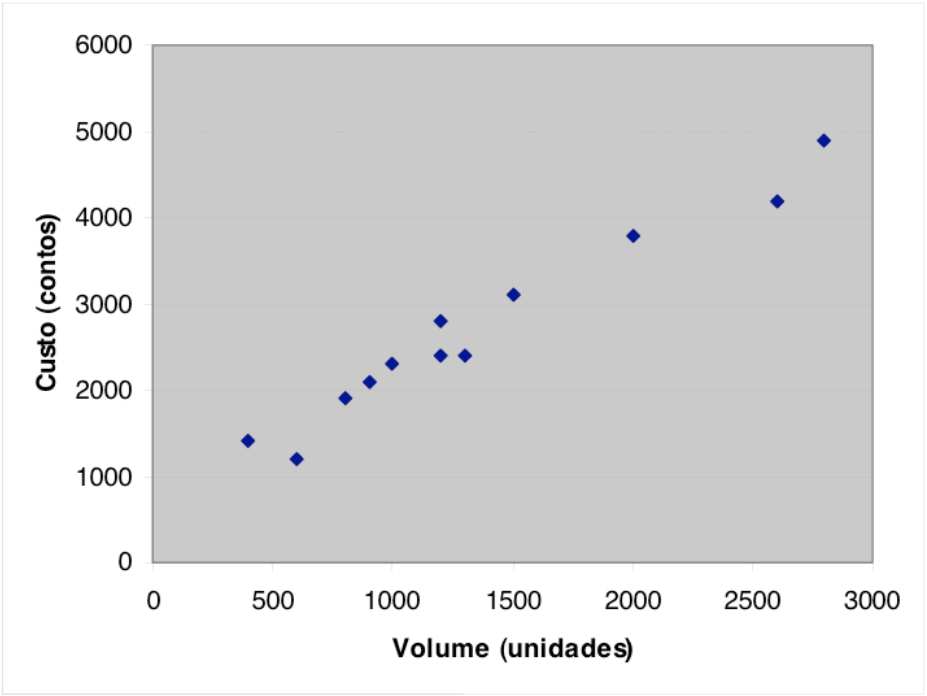
| Business and Law Schools | Admit | Deny |
|---|---|---|
| Male | 490 = 70% | 210 = 30% |
| Female | 280 = 56% | 220 = 44% |

- Agora a taxa de admissão de mulheres é inferior à dos homens!
- O que aconteceu? Esta situação é conhecida como Paradoxo de Simpson: inversão de resultados quando se juntam grupos
- Causado pela diferença nas percentagens nas suas tabelas (não se devem combinar percentagens) e não pelo tamanho das amostras

# Dados quantitativos – Diagrama $(x, y)$

| Lote | Volume de produção (unidades) | Custo de produção (contos) |
|---|---|---|
| 1 | 1500 | 3100 |
| 2 | 800 | 1900 |
| 3 | 2600 | 4200 |
| 4 | 1000 | 2300 |
| 5 | 600 | 1200 |
| 6 | 2800 | 4900 |
| 7 | 1200 | 2800 |
| 8 | 900 | 2100 |
| 9 | 400 | 1400 |
| 10 | 1300 | 2400 |
| 11 | 1200 | 2400 |
| 12 | 2000 | 3800 |

## Diagrama $(x, y)$




- Caracterização da interacção entre $X$ e $Y$

# Ajuste de uma relação linear → MMQ

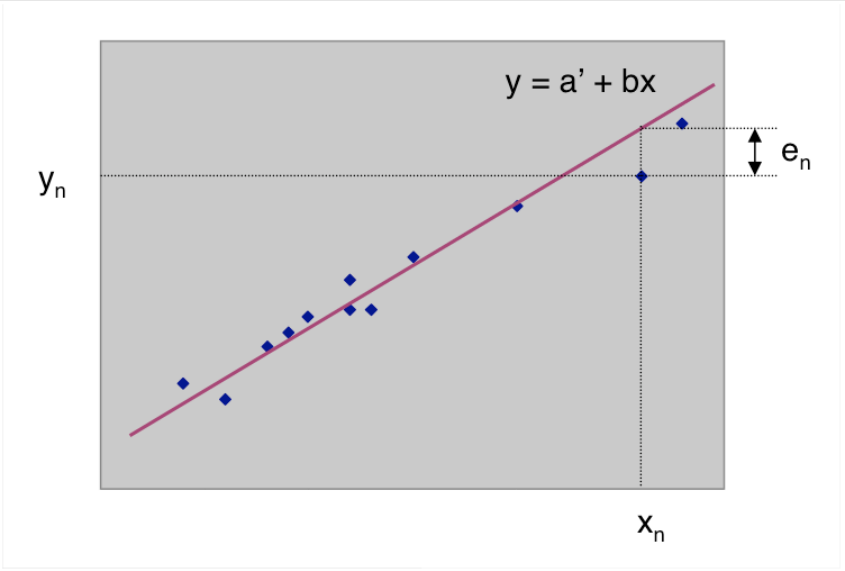
## Método dos mínimos quadrados (MMQ)

- Considere-se uma recta que, no plano $(x, y)$, tem a equação:

$$y = a' + b \cdot x$$

- Os parâmetros $a'$ e $b$ são fixados atendendo ao *erro* associado a cada ponto $(x_n, y_n)$:

$$e_n = y_n - (a' + bx_n)$$



# Ajuste de uma relação linear → MMQ (cont.)

## Método dos mínimos quadrados (MMQ) (cont.)

- Como medir o ajuste de uma dada recta a um conjunto de pontos

  ⇒ Utilizando os erros $e_n$

  **Soma dos erros:** cancelamento dos erros positivos com os negativos

  **Soma do valor absoluto dos erros:** dificuldade de manipulação matemática

  **Soma dos erros quadráticos:**

$$SEQ = \sum_{n=1}^{N} e_n^2 = \sum_{n=1}^{N} (y_n - a' - b \cdot x_n)^2$$

- Para um dado conjunto de pontos $(x_n, y_n)$, $SEQ$ apenas varia com os parâmetros $a'$ e $b$

# Ajuste de uma relação linear → MMQ (cont.)

## Método dos mínimos quadrados (MMQ) (cont.)

- Determinar os valores de $a'$ e $b$ que minimizam $SEQ$

  $\Rightarrow$ calcular as derivadas parciais e igualá-las a zero

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\,SEQ}{\mathrm{d}_{a'}} = (-2)\cdot\sum_{n=1}^{N}(y_n - a' - b\cdot x_n) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\,SEQ}{\mathrm{d}_{b}} = (-2)\cdot\sum_{n=1}^{N} x_n\cdot(y_n - a' - b\cdot x_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \overline{y} - b\overline{x} \\ b = \frac{s_{XY}}{s_{XX}} \end{cases}$$

onde: $$s_{XY} = \sum_{n=1}^{N}(x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y}) \qquad s_{XX} = \sum_{n=1}^{N}(x_n - \overline{x})^2$$

**Nota:** Utiliza-se $a'$ por razões de consistência com notação a introduzir no capítulo sobre Regressão

# Ajuste de uma relação linear → MMQ (Exemplo)

| | $x_n$ | $y_n$ | $(x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y})$ | $(x_n - \overline{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1500 | 3100 | 55486.11 | 20069.44 |
| | 800 | 1900 | 451319.44 | 311736.11 |
| | 2600 | 4200 | 1852152.78 | 1541736.11 |
| | 1000 | 2300 | 146319.44 | 128402.78 |
| | 600 | 1200 | 1143819.44 | 575069.44 |
| | 2800 | 4900 | 3159652.78 | 2078402.78 |
| | 1200 | 2800 | -14513.89 | 25069.44 |
| | 900 | 2100 | 278819.44 | 210069.44 |
| | 400 | 1400 | 1253819.44 | 918402.78 |
| | 1300 | 2400 | 17986.11 | 3402.78 |
| | 1200 | 2400 | 48819.44 | 25069.44 |
| | 2000 | 3800 | 700486.11 | 411736.11 |
| $\sum$ | 16300 | 32500 | 9094166.67 | 6249166.67 |
| $\sum/N$ | 1358.33 | 2708.33 | $s_{XY}$ | $s_{XX}$ |

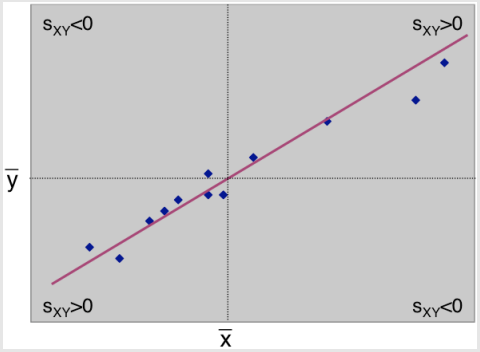
$$b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = 1.455 \qquad a' = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 731.6$$

$$y = a' + b \cdot x = 731.6 + 1.455 \cdot x$$

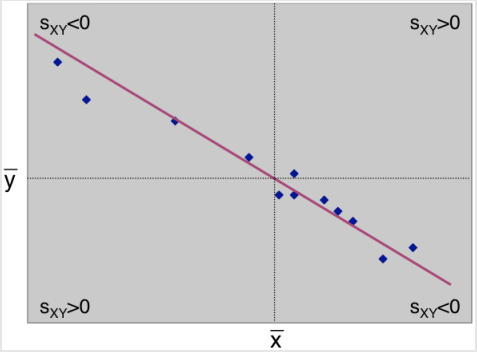
# Ajuste de uma relação linear → MMQ (cont.)

## Tipo de relações

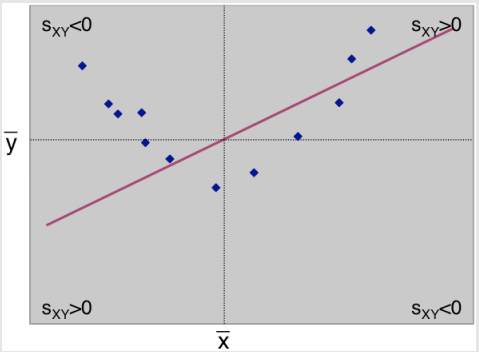
Relação linear com declive positivo




Relação linear com declive negativo




Relação não linear (quadrática)




## Observações

- Recta passa sempre pelo ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, sejam quais forem os dados
- Desde que os $x_n$ não sejam todos iguais, $s_{XX} > 0$, o sinal do declive da recta ($b$) será definido pelo termo $s_{XY} = \sum_{n=1}^{N}(x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y})$
- Perigoso fazer extrapolações para fora da gama de valores dos dados
- MMQ pode também ser utilizado para ajustar relações não lineares

# Medidas de associação (ou qualidade de ajuste)

- **Associação** é um qualquer tipo de relacionamento entre os dados
- Vamos apenas estudar medidas de relacionamento **linear**

**Medidas do grau de ajustamento da relação linear aos dados**

- **Produto cruzado médio**: $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})$
- **Covariância amostral**: (para inferências acerca da população)

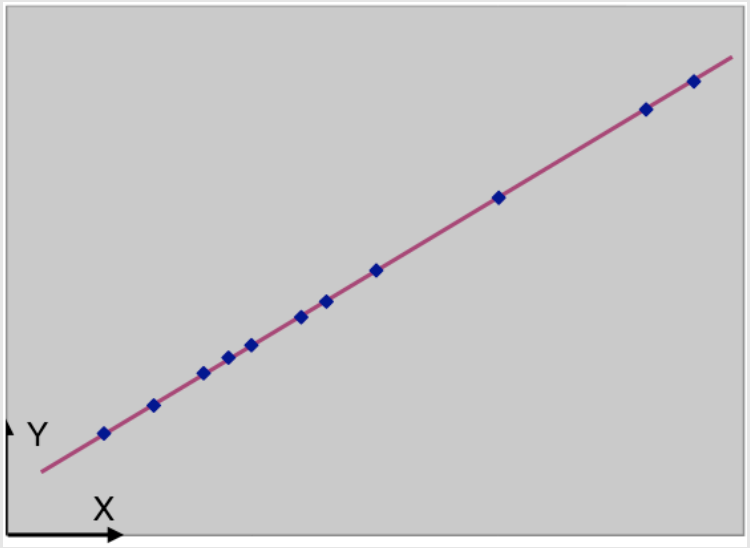
$$c_{XY}=\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})$$

- **Coeficiente de correlação amostral**: (medida adimensional)

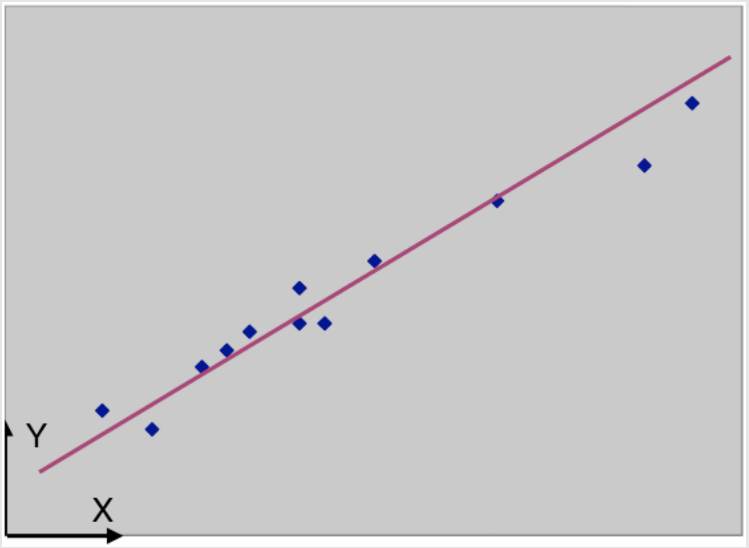
$$r_{XY}=\frac{c_{XY}}{s_X s_Y}=\frac{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\overline{x})^2}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(y_n-\overline{y})^2}}=\frac{s_{XY}}{\sqrt{s_{XX}s_{YY}}}$$

*Nota:* $s_X=\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\bar{x})^2$ é diferente de $s_{XX}=\sum_{n=1}^{N}(x_n-\bar{x})^2$

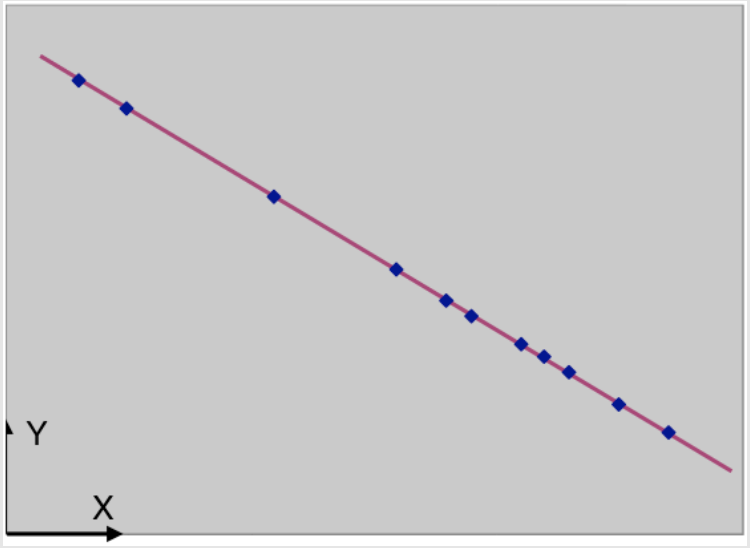
$r_{XY} = 1$



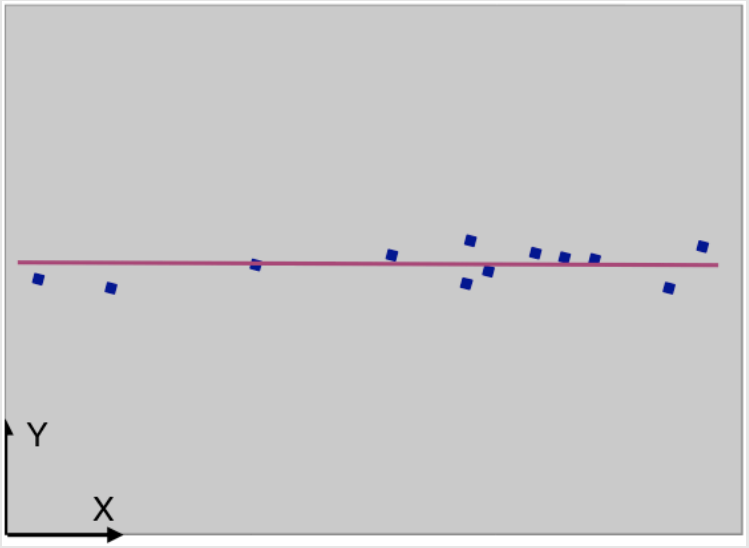

$0 < r_{XY} < 1$




$r_{XY} = -1$




$r_{XY} = 0$



- $r_{XY} = \pm 1$: relação linear perfeita entre os valores $x_n$ e $y_n$
- $r_{XY} = 0$: inexistência de qualquer relação linear
- $0 < |r_{XY}| < 1$: interpretação difícil $\Rightarrow$ **Coef. de determinação** $r_{XY}^2$

*Notas:* O coeficiente de correlação só mede relações lineares

É sensível a valores extremos atípicos

## Relação causa-efeito e Coeficiente de correlação

- Existência de relação causa-efeito $\Longrightarrow |r_{XY}| \approx 1$
- Será que $|r_{XY}| \approx 1 \Longrightarrow$ existência de relação causa-efeito ? **Não**
  1. $X$ pode ser a causa da ocorrência de $Y$
  2. $Y$ pode ser a causa da ocorrência de $X$
  3. Pode existir uma $3^a$ variável $Z$ que seja a causa comum da ocorrência de $X$ e $Y$
  4. Combinação das situações anteriores
  5. A relação entre $X$ e $Y$ pode ser pura coincidência

$\Longrightarrow$ necessário analisar **contexto** de cada situação e/ou realizar experiência específica para verificar relação causa-efeito

# Coeficiente de determinação amostral ($r^2_{XY}$)

- Expressando a variação em $Y$ em variação não explicada e explicada ...

$$S_{YY} = \sum_{n=1}^{N}(y_n - \bar{y})^2 = \sum_{n=1}^{N}[(y_n - \hat{y}_n) + (\hat{y}_n - \bar{y})]^2 = \overbrace{\sum_{n=1}^{N} e_n^2}^{\text{Não expl.}} + \overbrace{b^2 \sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2}^{\text{Explicada}}$$

- ...e dividindo a variação explicada pela variação total ...

$$\frac{b^2 \sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2}{\sum_{n=1}^{N}(y_n - \bar{y})^2} = \frac{\left(\frac{s_{XY}}{s_{XX}}\right)^2 \cdot s_{XX}}{s_{YY}} = \frac{s_{XY}^2}{s_{XX} \cdot s_{YY}} = \mathrm{r}^2_{\mathrm{XY}} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{N} e_n^2}{s_{YY}}$$

$\Rightarrow$ $r^2_{XY}$: representa a proporção da variação dos valores de $y$ que são explicados por variações nos valores de $x$

- Para inferências relativamente a populações a partir de amostras utiliza-se o **coeficiente de determinação corrigido**:

$$r^2_{XY} \text{ (corrigido) } = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(e_n)^2 \,/\, N-2}{s_{XY} \,/\, N-1}$$

# Dados mistos

Na caracterização do relacionamento envolvendo dados mistos é necessário distinguir duas situações:

**1ª situação** – a variável dependente ($Y$) é quantitativa e a variável independente ($X$) é qualitativa

⇒ Nesta situação, tipicamente pretende-se comparar a performance média entre dois (ou mais) grupos
*Exemplo*: comparação do número de calorias por dose entre vários grupos de fibras

**2ª situação** – a variável dependente ($Y$) é qualitativa e a variável independente ($X$) é quantitativa

*Exemplo*: relação entre a quantidade fumada (maços/dia – variável quantitativa) e se um doente desenvolve ou não cancro do pulmão (sim ou não – variável qualitativa)

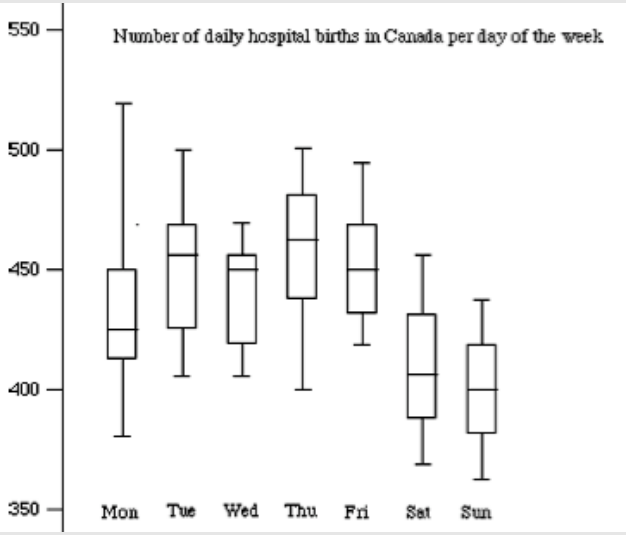
⇒ Requer conceitos avançados de estatística

⇒ Iremos estudar apenas a 1ª situação

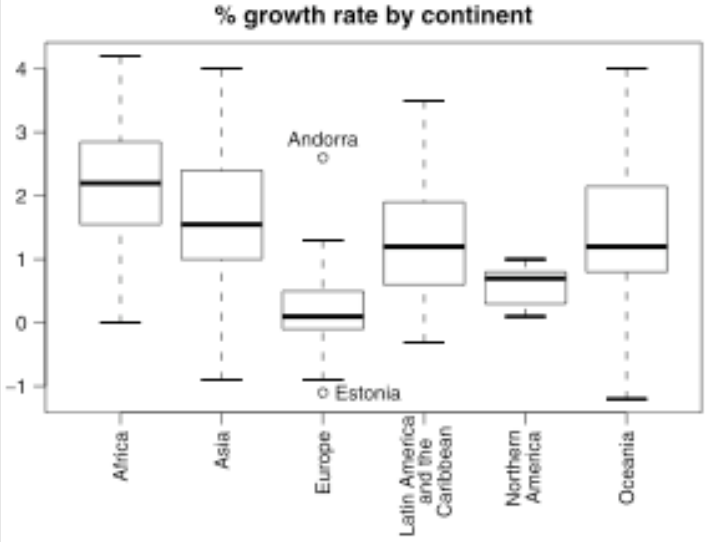
# Dados mistos – Comparação entre grupos

- Atributo qualitativo caracteriza o grupo
- Cálculo de estatísticas dentro de cada grupo
- Diagramas do tipo caixa para cada grupo, colocados lado a lado e alinhados para facilitar a comparação

⇒ Procurar **diferenças de dispersão** (variação) entre os vários grupos, **alterações nas médias** de cada grupo e ***outliers*** (valores extremos atípicos)




(*Schwarz, 2006*)




(*Schwarz, 2006*)

# Anexos

# Classificação de Dados: Resumo

## Summary of The Four Levels of Measurement: Appropriate Descriptive Statistics and Graphs

| Level of Measurement | P roperties | Examples | Descriptive statistics | Graphs |
|---|---|---|---|---|
| Nominal / Categorical | Discrete<br>Arbitrary<br>(no order) | Dichotomous<br>Yes / No Gender<br>Types / Categories<br>Colour shape | Frequencies<br>Percentage<br>Mode | Bar<br>Pie |
| Ordinal / Rank | Ordered categories<br>Ranks | Ranking of favourites<br>Academic grades | Frequencies<br>Mode<br>Median<br>Percentiles | Bar<br>Pie<br>Stem&leaf |
| Interval | Equal distances between values<br>Discrete (e.g., Likert scale)<br>Continuous (e.g., deg. F) | Discrete<br>- Thoughts, behaviours, feelings, etc. on a Likert scale<br>Continuous<br>- Deg. C or F | Frequencies (if discrete)<br>Mode (if discrete)<br>Median<br>Mean<br>SD<br>Skewness<br>Kurtosis | Bar (if discrete)<br>Pie (if discrete)<br>Stem & Leaf<br>Boxplot<br>Histogram (if continuous) |
| Ratio | Continuous<br>Meaningful 0 allows ratio statements (e.g., A is twice as large as B) | Age<br>Weight<br>VO_2 max<br>Deg. Kelvin | Mean<br>SD<br>Skewness<br>Kurtosis | Histogram<br>Boxplot<br>Stem & Leaf (may need to round leafs) |

adapted from `http://www.wilderdom.com/research/Summary_Levels_Measurement.html`

(James Neil, 2009)

# Classificação de Dados: Resumo (cont.)

## Summary of Descriptive Statistics Summaries for the Four Levels of Measurement

| Statistic | Nominal | Ordinal | Interval | Ratio |
|---|---|---|---|---|
| Mode | Yes | Yes | Yes | Yes |
| Median | No | Yes | Yes | Yes |
| Range, Min, Max | No | Yes | Yes | Yes |
| Mean | No | No | Yes | Yes |
| SD | No | No | Yes | Yes |

## Summary of Graphical Summaries for the Four Levels of Measurement

| Graph | Nominal | Ordinal | Interval | Ratio |
|---|---|---|---|---|
| Bar / Pie | Yes | Yes | If discrete | No |
| Stem & Leaf | No | Yes | Yes | Yes |
| Boxplot | No | Yes | Yes | Yes |
| Histogram | No | No | If continuous | Yes |

adapted from `http://www.wilderdom.com/research/Summary_Levels_Measurement.html`

(James Neil, 2009)

# Fórmulas de Cálculo Alternativas

## Cálculo da média amostral ($\bar{x}$)

- Soma de uma constante $C$

$$y_i = x_i + C, \quad i = 1, \ldots, n \quad \rightarrow \quad \bar{y} = \bar{x} + C$$

- Multiplicação por uma constante $C$

$$y_i = C \cdot x_i, \quad i = 1, \ldots, n \quad \rightarrow \quad \bar{y} = C \cdot \bar{x}$$

## Exemplo

The average fuel efficiencies, in miles per gallon, of cars sold in the United States in the years 1999 to 2003 were: $28.2, 28.3, 28.4, 28.5, 29.0$. Find the sample mean of this set of data.

# Fórmulas de Cálculo Alternativas

## Cálculo da média amostral ($\bar{x}$)

- Soma de uma constante $C$

$$y_i = x_i + C, \quad i = 1, \ldots, n \quad \rightarrow \quad \bar{y} = \bar{x} + C$$

- Multiplicação por uma constante $C$

$$y_i = C \cdot x_i, \quad i = 1, \ldots, n \quad \rightarrow \quad \bar{y} = C \cdot \bar{x}$$

## Exemplo

The average fuel efficiencies, in miles per gallon, of cars sold in the United States in the years 1999 to 2003 were: $28.2, 28.3, 28.4, 28.5, 29.0$. Find the sample mean of this set of data.

Fazendo: $y_i = 10 \cdot x_i - 280$

| $x_i$ | 28.2 | 28.3 | 28.4 | 28.5 | 29.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |

$$\bar{y} = \frac{2+3+4+5+10}{5} = \frac{24}{5} = 4.8 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\bar{y}+280}{10} = \frac{284.8}{10} = 28.48$$

## Cálculo da variância amostral ($s^2$)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

- Dificuldade reside no cálculo da expressão: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
- Esta expressão pode ser simplificada de forma a facilitar o cálculo manual:
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot n \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 \cdot n = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left( n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

## Cálculo de $s^2$ pela fórmula tradicional

| $x_i$ | 1 | 2 | 5 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| $x_i - \bar{x}$ | -3 | -2 | 1 | 2 | 2 |
| $(x_i - \bar{x})^2$ | 9 | 4 | 1 | 4 | 4 |

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{9+4+1+4+4}{5-1} = \frac{22}{4} = 5.5$$

## Cálculo de $s^2$ pela fórmula alternativa

| $x_i$ | 1 | 2 | 5 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i^2$ | 1 | 4 | 25 | 36 | 36 |

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1 + 4 + 25 + 36 + 36 = 102$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N \cdot \bar{x}^2 = 102 - 5 \times 16 = 22$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N \cdot \bar{x}^2\right) = \frac{22}{4} = 5.5$$

**Exemplo**

The following data give the yearly numbers of law enforcement officers killed in the United States over 10 years:

$$164, 165, 157, 164, 152, 147, 148, 131, 147, 155$$

Find the sample variance of the number killed in these years.

**Exemplo**

The following data give the yearly numbers of law enforcement officers killed in the United States over 10 years:

$$164, 165, 157, 164, 152, 147, 148, 131, 147, 155$$

Find the sample variance of the number killed in these years.

To make the computation easier: $y_i = x_i - 150$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 164 | 165 | 157 | 164 | 152 | 147 | 148 | 131 | 147 | 155 |
| $y_i$ | 14 | 15 | 7 | 14 | 2 | -3 | -2 | -19 | -3 | 5 |
| $y_i^2$ | 196 | 225 | 49 | 196 | 4 | 9 | 4 | 361 | 9 | 25 |

$$\bar{y} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{14 + 15 + 7 + 14 + 2 - 3 - 2 - 19 - 3 + 5}{10} = \frac{30}{10} = 3.0$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 196 + 225 + 49 + 196 + 4 + 9 + 4 + 361 + 9 + 25 = 1078$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N \cdot \bar{y}^2 = 1078 - 10 \times 3^2 = 988 \qquad s^2 = \frac{988}{9} \approx 109.78$$

Nota: $x_i - \bar{x} = x_i - \bar{x} - C + C = (x_i - C) - (\bar{x} - C) = y_i - \bar{y}$

# Fórmulas de Cálculo Alternativas

**Cálculo do coeficiente de correlação amostral ($r$)**

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{(n-1) \cdot s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Computational formula for $r$:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2\right)}}$$

**Useful property** — If $r$ is the sample correlation coefficient for the data $x_i, y_i$ with $i = 1, \ldots, n$, then for any constants $a$, $b$, $c$ and $d$, it is also the sample correlation coefficient for the data $a + b \cdot x_i, c + d \cdot y_i$ with $i = 1 \ldots, n$ provided that $b$ and $d$ have the same sign (that is, provided that $b \cdot d \geq 0$).

**Exemplo**

The following table gives the U.S. per capita consumption of whole milk ($x$) and low-fat milk ($y$) in three different years. Find the sample correlation coefficient of the given data.

| | Per capita consumption (gallons) | | |
|---|---|---|---|
| | 1980 | 1982 | 1984 |
| Whole milk ($x$) | 17.1 | 14.7 | 12.8 |
| Low-fat milk ($y$) | 10.6 | 11.5 | 13.2 |

**Exemplo**

The following table gives the U.S. per capita consumption of whole milk ($x$) and low-fat milk ($y$) in three different years. Find the sample correlation coefficient of the given data.

| | Per capita consumption (gallons) | | |
|---|---|---|---|
| | 1980 | 1982 | 1984 |
| Whole milk ($x$) | 17.1 | 14.7 | 12.8 |
| Low-fat milk ($y$) | 10.6 | 11.5 | 13.2 |

To make the computation easier, let us first subtract 12.8 from each of the $x$ values and 10.6 from each of the $y$ values.

| | i | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| $x_i'$ | 4.3 | 1.9 | 0 |
| $y_i'$ | 0 | 0.9 | 2.6 |

$$\bar{x}' = \frac{4.3 + 1.9 + 0}{3} = 2.0667$$

$$\bar{y}' = \frac{0 + 0.9 + 2.6}{3} = 1.1667$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 4.3^2 + 1.9^2 + 0 = 22.10$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i = 0 + 1.9 \times 0.9 + 0 = 1.71$$

$$\sum_{i=1}^{3} y_i^2 = 0 + 0.9^2 + 2.6^2 = 7.57$$

$$r = \frac{1.71 - 3 \times 2.0667 \times 1.1667}{\sqrt{[22.10 - 3 \times 2.0667^2] \cdot [7.57 - 3 \times 1.1667^2]}} = -0.97$$

# Fórmulas de Cálculo Alternativas

**Comentários:**

- Fórmula alternativa **facilita** os cálculos quando realizados com calculadoras tradicionais
- Apresenta no entanto problemas de **precisão numérica** que poderão originar resultados errados
  (devido à subtracção de dois valores da mesma dimensão quando estes têm muitos dígitos significativos, por serem muito grandes e/ou terem muitas casas decimais, devido à capacidade finita da representação em vírgula flutuante — ver exemplo no slide seguinte)
- Existe uma outra fórmula de cálculo baseada em iterações que é igualmente eficiente em termos computacionais e não apresenta problemas de previsão numérica (ver "Computing the standard deviation efficiently", Mark Hoemmen, `http://www.cs.berkeley.edu/~mhoemmen/cs194/Tutorials/variance.pdf`)
- Para a grande maioria das situações a fórmula alternativa apresentada atrás é adequada e a mais prática de usar

**Exemplo**

Calcule, usando a fórmula alternativa, a variância amostral para as seguintes situações:

10 000, 10 001, 10 002

100 000, 100 001, 100 002

1 000 000, 1 000 001, 1 000 002

10 000 000, 10 000 001, 10 000 002

100 000 000, 100 000 001, 100 000 002

...

- A correcção dos resultados depende da precisão do computador ou da calculadora usada
- Como se poderia obter o resultado correcto facilmente?

# Resultados de aprendizagem

- Distinguir os diferentes tipos de escalas em que dados podem ser expressos
- Classificar e sintetizar manualmente pequenos conjuntos de dados amostrais
- Calcular, manualmente ou com recurso a calculadoras, estatísticas de pequenos conjuntos de dados amostrais
- Utilizar folhas de cálculo e software estatístico para classificar e sintetizar dados amostrais (representação tabular e gráfica, cálculo de estatísticas)
- Distinguir os vários tipos de estatísticas: de localização, de dispersão, de forma e de associação
- Interpretar correctamente representações tabulares e gráficas de dados amostrais, assim como os resultados de estatísticas